УДК 519.234

ЭМПИРИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ С ГАРАНТИРОВАННЫМ ВЫВОДОМ

Э. А. Заарур[1] [0009-0008-8585-4174], С. В. Симушкин[2] [0000-0003-2544-0267]

[1, 2]*Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия*

[1]zrwrz05@gmail.com, [2]smshkn@gmail.com

Аннотация

Для построения гарантийных процедур различения двух односторонних гипотез применены методы ядерного оценивания априорной плотности в задаче деконволюции. Рассмотрена ситуация, когда наблюдаемая случайная величина представляет собой сумму неизвестного параметра и центрированной нормальной ошибки с известной дисперсией. Построены состоятельные эмпирические оценки для функции d-апостериорного риска. Установлена сходимость соответствующей критической константы к оптимальному значению. Точность процедур проиллюстрирована численно на трех вариантах априорного распределения.

Ключевые слова: *эмпирический байесовский подход, проблема деконволюции, гарантированный статистический вывод, d-апостериорный подход.*

ВВЕДЕНИЕ

Пусть в эксперименте наблюдается выборка $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n), n \geq 1$, независимых нормальных $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ случайных величин. По результатам наблюдений $X^{(n)} = x^{(n)}$ требуется проверить гипотезу $H_0: \theta \leq \theta_0$ против альтернативы $H_1: \theta > \theta_0$. В ситуации, когда задача проверки гипотез возникает многократно, можно предположить, что значение параметра θ есть реализация случайной величины ϑ с некоторым априорным распределением. Здесь мы рассматриваем случай, когда ϑ имеет абсолютно непрерывное распределение относительно меры Лебега с плотностью $g(\theta), \theta \in R^1$. Качество решений будет оценено посредством так называемого d-апостериорного риска.

Пусть $\delta = \delta\left(x^{(n)}\right)$, $x^{(n)} \in R^n$, есть решающее правило, принимающее решение d_0 в пользу гипотезы H_0 или решение d_1 в пользу гипотезы H_1. d-апостериорный риск первого рода решающего правила δ определяется как средняя доля ошибочных решений среди экспериментов, закончившихся принятием нулевой гипотезы:

$$\mathcal{R}_0(c;g) = \mathbb{P}\big(\vartheta > \theta_0 \mid \delta\big(X^{(n)}\big) = d_0\big).$$

Решающее правило должно быть гарантийным, т. е. должно удовлетворять заданному ограничению $\mathcal{R}_0(c;g) \le \beta$ на величину d-апостериорного риска первого рода (см. [1, 2]). Как всегда, величина β выбирается исследователем.

Поскольку нормальная вероятностная модель имеет монотонное отношение правдоподобия, оптимальное гарантийное решающее правило, которое минимизирует d-апостериорный риск второго рода

$$\mathcal{R}_1(c;g) = \mathbb{P}\big(\vartheta \le \theta_0 \mid \delta\big(X^{(n)}\big) = d_1\big),$$

принимает решение в пользу H_0, когда выборочное среднее $\overline{x} \le c$, где критическая константа находится из условия $\mathbb{P}\big(\vartheta > \theta_0 \mid \overline{X} \le c\big) = \beta$ (см. [1, 2]). Эта константа зависит от априорной плотности. Чтобы подчеркнуть этот факт, будем обозначать решение предыдущего уравнения через $c(g)$.

Обозначим через Φ функцию распределения стандартного нормального $\mathcal{N}(0,1)$ закона, а через φ – ее функцию плотности. Известно, что при фиксированном θ выборочное среднее $\overline{X}$ имеет нормальное $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2/n)$ распределение. В настоящей статье мы не касаемся вопросов планирования эксперимента, поэтому в дальнейшем будем считать, что в эксперименте наблюдается случайная величина $X \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$.

Кроме того, мы рассматриваем только такие априорные плотности, которые сосредоточены на ограниченном открытом интервале (A, B) числовой прямой: $g(\theta) = 0, \theta \notin (A, B)$.

Таким образом, d-риск первого рода оптимального решения можно записать как $\mathcal{R}_0(c;g) = Q(c;g)/F(c;g)$, где

$$Q(c;g) = \mathbb{P}(\vartheta > \theta_0, X \le c) = \int_{\theta_0}^{B} \Phi\left(\frac{c-\theta}{\sigma}\right) g(\theta)d\theta, \tag{1}$$

$F(c;g)$ – безусловная функция распределения X:

$$F(c;g) = \int_{A}^{B} \Phi\left(\frac{c-\theta}{\sigma}\right) g(\theta)d\theta. \tag{2}$$

Как уже отмечалось, оптимальное решение и, в частности, константа $c(g)$ зависят от вида априорной плотности g. Эту плотность можно оценить, если имеется архив предварительных наблюдений. Подобная идея близка по духу к эмпирическому байесовскому подходу, предложенному Г. Роббинсом. Развитие этой идеи применительно к d-апостериорному подходу впервые было осуществлено в работе [3]. Если вид априорной плотности известен с точностью до некоторых параметров, то проблема решается обычным способом. Например, если g также нормальная плотность, то здесь вполне уместны классические оценки параметров модели II дисперсионного анализа со случайными факторами [4].

Задача оценивания плотности g в описанной выше ситуации по архиву наблюдений $\Xi_k = (x_1, \dots, x_k)$ с общей функцией распределения F известна как проблема деконволюции (см. [5–7]). Наша цель состоит в демонстрации возможностей применения методов деконволюции к построению гарантийного решающего правила. В работе [8] нами рассмотрен вопрос построения состоятельного эмпирического аналога для байесовской оценки в рамках предлагаемой вероятностной модели на основе ядерной оценки априорной плотности. Эти аналоги были построены как для случая известной дисперсии наблюдений, так и для случая, когда дисперсию наблюдений также приходилось оценивать по архивным данным (методику такого оценивания можно найти в [9]).

НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

1. Свойства функции d-апостериорного риска

В работе [1] было показано, что функция $\mathcal{R}_0(c; g)$ удовлетворяет следующим свойствам.

Лемма 1. *При любой плотности* g *функция* $\mathcal{R}_0(c; g), c \in R$, *(a) непрерывна, (b) возрастает, (c)* $\lim\limits_{c \to -\infty} \mathcal{R}_0(c; g) = 0$, *(d)* $\lim\limits_{c \to \infty} \mathcal{R}_0(c; g) = \Pi_1 = P\{\vartheta > \theta_0\}$.

Следовательно, для любого $0 < \beta < \Pi_1$ всегда найдется единственное $c = c(g)$ такое, что $\mathcal{R}_0(c(g); g) = \beta$. В дальнейшем будем предполагать, что для истинного априорного распределения это условие выполнено.

2. Оценка априорной плотности

Подходящая для наших целей ядерная оценка g описана в статье [5]. Из представления (2) видно, что безусловное распределение X есть свертка с плотностью $f = g * h$, где плотность h совпадает с плотностью нормального $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ закона. Оценка g по набору независимых наблюдений Ξ_k, имеющих общую плотность f, строится следующим образом.

Пусть $\psi_g(t)$ – характеристическая функция случайной величины ϑ (преобразование Фурье функции плотности g), $\psi_h(t) = \exp(-t^2/2)$ – характеристическая функция h. Оценка $\hat{g}_k$ для функции плотности g имеет следующий вид:

$$\hat{g}_k(\theta, \Xi_k) = \frac{1}{k\pi} \sum_1^k \int_0^{1/\lambda} \frac{1}{\psi_h(t)} K(t\lambda) \cos\{t(x_j - \theta)\}\, dt. \tag{3}$$

Заметим, что функция ψ_h удовлетворяет условиям, описанным в [5].

Теорема 1 ([5], Теорема 3.1). *Если* $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_g(t)| dt < \infty$, *функция* $g(\theta)$ *непрерывна и ограничена, то при* $\lambda_k \to 0$, $k \to \infty$, *имеет место*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{-\infty<\theta<\infty} |\hat{g}_k(\theta, \Xi_k) - g(\theta)| \right) \longrightarrow 0.$$

Параметр $\lambda = \lambda_k > 0$ выбирается в зависимости от объема k архива Ξ. В работе [6] предложено взять $\lambda_k = \sqrt{2/\ln k}$. Ядро *K* можно выбирать произвольным образом. Как показано в [6], точность аппроксимации зависит от гладкости функции $K(\theta)$ в точке $\theta = 0$.

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ЭМПИРИЧЕСКИХ АНАЛОГОВ РИСКА

Используем теперь результат теоремы 1 для построения оценки функции d-риска 1-го рода $\mathcal{R}_0(c; g)$ и изучим ее свойства. Определим константу $c(\hat{g}_k)$ как решение уравнения $\mathcal{R}_0(c; \hat{g}_k) = \beta$, если $\Pi_{1k} = \int_{\theta_0}^{B} \hat{g}_k(\theta, \Xi_k) d\theta > \beta$, и $c(\hat{g}_k) = B$ в противном случае.

Теорема 2. *Если функция плотности* g *финитная, то есть непрерывная, принимающая нулевое значение вне некоторого конечного интервала* $I = [A, B]$, *то при* $k \to \infty$ *по вероятности*

i) $\sup_{c \in I} |\mathcal{R}_0(c; \hat{g}_k) - \mathcal{R}_0(c; g)| \xrightarrow{P} 0$;

ii) $\quad c(\hat{g}_k) \overset{P}{\to} c(g).$

Доказательство. В условиях теоремы при вычислениях интегралов, определяющих d-апостериорный риск, область интегрирования можно ограничить интервалом I. В силу (1) для функции $Q(c; g)$ имеем

$$\sup_{c\in I}|Q(c;\ \hat{g}_k) - Q(c; g)| \leq \sup_{c\in I} \int_{\theta_0}^{B} \Phi\left(\frac{c-\theta}{\sigma}\right)|\hat{g}_k(\theta, \Xi_k) - g(\theta)|d\theta$$

$$\leq (B-\theta_0) \sup_{\theta\in[\theta_0, B]} |\hat{g}_k(\theta, \Xi_k) - g(\theta)| \overset{\boldsymbol{P}}{\to} 0,$$

так как сходимость в среднем влечет сходимость по вероятности.

Аналогично для функции распределения (2):

$$\sup_{c\in I}|F(c; \hat{g}_k) - F(c; g)| \leq (B-A) \sup_{\theta\in[A,B]} |\hat{g}_k(\theta, \Xi_k) - g(\theta)|.$$

Рассмотрим константу $l = \inf_{c\in I} F(c)$. Из формулы (2) следует, что $l > 0$.

Для каждого *ε > 0* справедливо следующее неравенство:

$$P\left\{\sup_{c\in I}\left|\frac{\hat{Q}(c)}{\hat{F}(c)} - \frac{Q(c)}{F(c)}\right| > \varepsilon\right\} \leq\ P\left\{\sup_{c\in I}\left|\hat{F}(c) - F(c)\right| > \varepsilon\right\}$$

$$+P\left\{\sup_{c\in I}\left(\left|\frac{\hat{Q}(c)}{\hat{F}(c)}\hat{F}(c) - \frac{Q(c)}{F(c)}\hat{F}(c)\right|\right) > \varepsilon(l-\varepsilon)\right\}$$

Действительно, если мы определим $\Delta(c) = \left|\frac{\hat{Q}(c)}{\hat{F}(c)} - \frac{Q(c)}{F(c)}\right|$, то из неравенства $\sup_{c\in I} \Delta(c) > \varepsilon$ следует, что

$$\sup_{c\in I}\Big(\ \Delta(c)\hat{F}(c)\Big) > \varepsilon \inf_{c\in I} \hat{F}(c) = \varepsilon \inf_{c\in I}\Big(\hat{F}(c) - F(c) + F(c)\Big)$$

$$\geq \varepsilon \inf_{c\in I}\big(F(c)\big) - \varepsilon \sup_{c\in I}\left|\hat{F}(c) - F(c)\right| \geq \varepsilon l - \varepsilon^2,$$

где последнее неравенство выполняется, если $\sup_{c\in I}\left|\hat{F}(c) - F(c)\right| \leq \varepsilon.$

Заметим, что

$$\sup_{c\in I}\left(\Delta(c)\hat{F}(c)\right) \le \sup_{c\in I}\left|\hat{Q}(c)-Q(c)\right| + \sup_{c\in I}\left(\left|\frac{Q(c)}{F(c)}\hat{F}(c)-Q(c)\right|\right)$$

$$\le \sup_{c\in I}\left|\hat{Q}(c)-Q(c)\right| + \sup_{c\in I}\left|\frac{Q(c)}{F(c)}\right|\sup_{c\in I}\left|\hat{F}(c)-F(c)\right|,$$

Следовательно, неравенство $\sup_{c\in I}\left(\Delta(c)\hat{F}(c)\right) > \varepsilon(l-\varepsilon)$ влечет

$$\sup_{c\in I}\left|\hat{F}(c)-F(c)\right| > \tfrac{\varepsilon(l-\varepsilon)}{2} \text{ или } \sup_{c\in I}\left|\hat{Q}(c)-Q(c)\right| > \tfrac{\varepsilon(l-\varepsilon)}{2}.$$

Если зафиксировать $0 < \varepsilon < l$, то при $\gamma = \min(\varepsilon, \frac{\varepsilon(l-\varepsilon)}{2})$ получим

$$P\left\{\sup_{c\in I}\left|\frac{\hat{Q}(c)}{\hat{F}(c)}-\frac{Q(c)}{F(c)}\right| > \varepsilon\right\} \le 2P\left\{\sup_{c\in I}\left|\hat{F}(c)-F(c)\right| > \gamma\right\}$$

$$+P\left\{\sup_{c\in I}\left|\hat{Q}(c)-Q(c)\right| > \gamma\right\}.$$

Как было доказано ранее,

$$P\left\{\sup_{c\in I}\left|\hat{Q}(c)-Q(c)\right| > \gamma\right\} \to 0 \text{ и } P\left\{\sup_{c\in I}\left|\hat{F}(c)-F(c)\right| > \gamma\right\} \to 0,$$

следовательно, $P\left\{\sup_{c\in I}\left|\frac{\hat{Q}(c)}{\hat{F}(c)}-\frac{Q(c)}{F(c)}\right| > \varepsilon\right\} \to 0$. Утверждение i) доказано.

Перейдем к доказательству ii). Выберем $\varepsilon > 0$. Так как функция риска $\mathcal{R}_0(c;g)$ непрерывно возрастает по c и $\mathcal{R}_0(c(g);g) = \beta$, найдется $\gamma > 0$ такое, что $\mathcal{R}_0(c;g) > \beta + \gamma$ для всех $c > c(g) + \varepsilon$. По свойствам функции $\mathcal{R}_0$ в случае $\Pi_{1k} < \beta$ выполняется условие $\mathcal{R}_0(B;\hat{g}_k) < \beta$, то есть всегда $\mathcal{R}_0(c(\hat{g}_k);\hat{g}_k) \le \beta$. Следовательно, событие $c(\hat{g}_k) > c(g) + \varepsilon$ влечет

$$\mathcal{R}_0(c(\hat{g}_k);g) > \beta + \gamma \ge \mathcal{R}_0(c(\hat{g}_k);\hat{g}_k) + \gamma.$$

Поэтому

$$P\{c(\hat{g}_k) > c(g) + \varepsilon\} \leq P\{\mathcal{R}_0(c(\hat{g}_k); g) - \mathcal{R}_0(c(\hat{g}_k); \hat{g}_k)\ > \gamma\}$$
$$\leq\ P\left\{\sup_{c\in I}|\mathcal{R}_0(c; g) - \mathcal{R}_0(c; \hat{g}_k)|\ > \gamma\right\} \to 0$$

в силу утверждения i). Докажем теперь, что $P\{c(\hat{g}_k) < c(g) - \varepsilon\} \to 0.$

Из теоремы 1 следует также, что

$$\varPi_{1k} = \int_{\theta_0}^{B} \hat{g}_k(\theta, \varXi_k) d\theta \xrightarrow{\boldsymbol{P}} \varPi_1$$

.

Так как $\beta - \varPi_1 < 0$, то,

$$P\{\varPi_{1k} < \beta\} \leq P\{\varPi_{1k} - \varPi_1 < \beta - \varPi_1\} \to 0.$$

При этом, если $\varPi_{1k} < \beta$, то по построению $\mathcal{R}_0(c(\hat{g}_k); g) = \beta.$

Выберем $\gamma > 0$ так, чтобы $\mathcal{R}_0(c; g) < \beta - \gamma$ для всех $c < c(g) - \varepsilon.$ Если $\varPi_{1k} < \beta$, то событие $c(\hat{g}_k) < c(g) + \varepsilon$ влечет

$$\mathcal{R}_0(c(\hat{g}_k); g) < \beta - \gamma = \mathcal{R}_0(c(\hat{g}_k); \hat{g}_k) - \gamma.$$

Поэтому

$$P\{c(\hat{g}_k) < c(g) - \varepsilon\} \leq P\{\mathcal{R}_0(c(\hat{g}_k); g) - \mathcal{R}_0(c(\hat{g}_k); \hat{g}_k) < -\gamma\}$$
$$+P\{\varPi_{1k} < \beta\} \to 0.$$

Теорема доказана.

ЧИСЛЕННЫЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ

Рассмотрим несколько примеров, в которых реализованы описанные выше методы. В части этих примеров априорная плотность не будет удовлетворять условию на носитель. Такие плотности выбраны специально, чтобы проанализировать возможность будущего обобщения теоремы 2. В этих примерах каждая вероятностная модель априорного распределения, в принципе, также имеет некоторый набор гиперпараметров. Модельные испытания были осуществлены для конкретных значений этих гиперпараметров

Пример 1. Пусть параметр ϑ имеет априорное экспоненциальное распределение с плотностью $g(\theta) = e^{-\theta}, \theta > 0$. Найдем аналитическое выражение для функции d-апостериорного риска $\mathcal{R}_0(c; g)$. Вид числителя $\mathcal{R}_0(c; g)$ после интегрирования по частям и простых алгебраических преобразований приобретает следующий вид:

$$Q(c,g) = \int_{\theta_0}^{\infty} \Phi\left(\frac{c-\theta}{\sigma}\right) e^{-\theta} d\theta = \Phi\left(\frac{c-\theta_0}{\sigma}\right) e^{-\theta_0} + \int_{\theta_0}^{\infty} \varphi\left(\frac{c-\theta}{\sigma}\right) e^{-\theta} d\theta$$

$$= \Phi\left(\frac{c-\theta_0}{\sigma}\right) e^{-\theta_0} - e^{-c+\frac{\sigma^2}{2}} \Phi\left(\frac{c-\theta_0}{\sigma} - \sigma\right).$$

Подставив сюда $\theta_0 = 0$, найдем функцию распределения $F(c, g)$

$$F(c,g) = \int_{0}^{\infty} \Phi\left(\frac{c-\theta}{\sigma}\right) g(\theta) d\theta = \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - e^{-c+\frac{\sigma^2}{2}} \Phi\left(\frac{c}{\sigma} - \sigma\right).$$

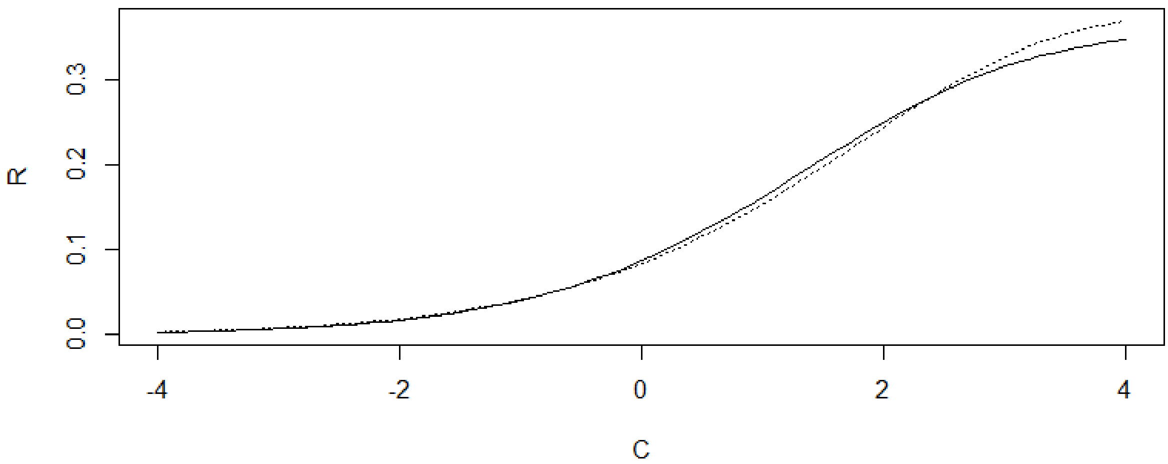

Рис. 1. Оценки функции риска при экспоненциальном априори.

Итак, функция d-апостериорного риска 1-го рода имеет следующее представление:

$$\mathcal{R}_0(c; g) = \frac{\exp(-\theta_0)\Phi\big((c-\theta_0)/\sigma\big) - \exp(-c + \frac{\sigma^2}{2})\,\Phi\big((c-\theta_0)/\sigma - \sigma\big)}{\Phi(c/\sigma) - \exp(-c + \frac{\sigma^2}{2})\,\Phi(c/\sigma - \sigma)}.$$

Модельные испытания проводились для $\sigma = 1$ с границей $\theta_0 = 1$.

На рис. 1 (и во всех последующих для других примеров) приведены графики истинной функции риска (сплошная линия) и функции риска с оценкой априорной плотности, построенной по $k = 700$ архивным данным (пунктирная линия). В этом примере использовано равномерное ядро $K(t) = 1$. Область изменения θ при вычислениях интегралов была выбрана из условия наилучшего приближения ядерной оценки функции распределения к эмпирической функции распределения; в данном случае была взята область $\theta \in [0,5]$.

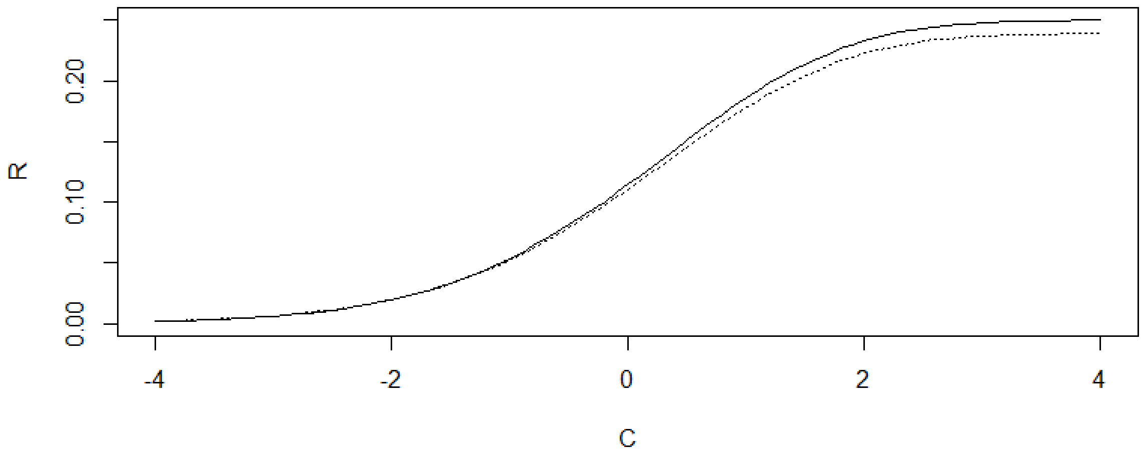

Рис. 2. Оценка функции риска для равномерного априори.

Пример 2. Рассмотрим теперь априорное распределение с равномерной плотностью $g(\theta) = \frac{1}{2}$, $\theta \in [-1.1]$. Функция риска имеет следующий вид:

$$\mathcal{R}_0(c; g) = \int_{\theta_0}^{1} \Phi\left(\frac{c-\theta}{\sigma}\right) d\theta \ / \int_{-1}^{1} \Phi\left(\frac{c-\theta}{\sigma}\right) d\theta.$$

Заметим, что производная нормальной плотности $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$. Следовательно, $\int \Phi(x)dx = x\Phi(x) + \varphi(x) + \mathrm{Const}$. Введем обозначение $\Phi\mathrm{i}(x) = x\Phi(x) + \varphi(x)$. Функция риска равна

$$\mathcal{R}_0(c;g) = \frac{\Phi\mathrm{i}\big((c-\theta_0)/\sigma\big) - \Phi\mathrm{i}\left(\frac{(c-1)}{\sigma}\right)}{\Phi\mathrm{i}\big((c+1)/\sigma\big) - \Phi\mathrm{i}\big((c-1)/\sigma\big)}.$$

Как и в предыдущем примере, модельные испытания проводились для $\sigma = 1$ с границей $\theta_0 = 0.5$.

Пример 3. В заключительном примере рассмотрена априорная плотность, состоящая из смеси двух нормальных плотностей с общей единичной дисперсией и разными математическими ожиданиями λ_1, λ_2 соответственно:

$$g(\theta) = p\varphi(\theta - \lambda_1) + (1-p)\varphi(\theta - \lambda_2),$$

где φ – плотность стандартного нормального $(0{,}1)$ распределения, $0 < p < 1$.

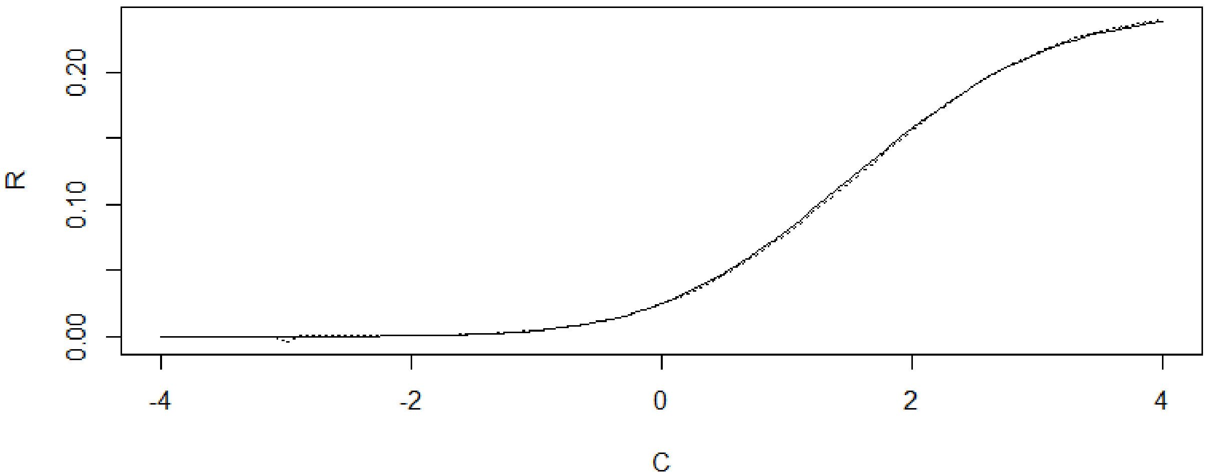

Рис. 3. Оценка функции риска с априори в виде смеси нормальных.

Выберем границу между гипотезами $\theta_0 = 1$. Найдем функцию распределения X, то есть знаменатель $\mathcal{R}_0$. Выражение $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{c-\theta}{\sigma}\right)\varphi(\theta - \lambda)d\theta$ есть функция распределения свертки двух нормальных распределений, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{c-\theta}{\sigma}\right) g(\theta)d\theta \; = \; p\Phi\left(\frac{c-\lambda_1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right) + (1-p)\Phi\left(\frac{c-\lambda_2}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right).$$

Числитель $Q(c;g)$ функции риска $\mathcal{R}_0(c;g)$ в данном случае не имеет простого представления. При модельных испытаниях этот числитель находился приближенными методами. Итак,

$$\mathcal{R}_0(c;g) = \frac{\int_1^{\infty} \Phi\left(\frac{c-\theta}{\sigma}\right)\left(p\varphi(\theta-\lambda_1)+(1-p)\varphi(\theta-\lambda_2)\right)d\theta}{p\Phi\left(\frac{c-\lambda_1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right)+(1-p)\Phi\left(\frac{c-\lambda_2}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right)}.$$

В этом примере значения параметров при модельных испытаниях $\sigma^2 = 1$, $p = 0.4$, $\lambda_1 = 1.2$, $\lambda_2 = -1$. Область интегрирования $\theta \in [-4, 4]$. Графики функций риска приведены на рис. 3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эмпирические байесовские методы, использующие ядерную оценку априорной плотности, вполне уместны при решении задач построения гарантийных процедур в d-апостериорном подходе. Проведенные модельные испытания при разных априорных предположениях показали, что, в принципе, требуется достаточно большой объем архивных данных k. В статье не описаны осуществленные попытки построения оценок при малых $k \leq 100$, которые показали не очень хорошие результаты. Кроме того, эти испытания убеждают, что утверждения о состоятельности оценок риска и критической константы, скорее всего, справедливы для более широкого класса априорных плотностей. В частности, сравнение эмпирических аналогов трех моделей показало, что наилучший результат достигается для смеси нормальных распределений.

Благодарности

Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академи-ческого лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Simushkin D.S., Simushkin S.V., Volodin I.N.* On the d-posterior approach to the multiple testing problem // Journal of Statistical Computation and Simulation. 2021. Vol. 91, No. 4. P. 651–666.

2. *Симушкин С.В.* Оптимальные d-гарантийные процедуры различения двух гипотез// Деп. ВИНИТИ АН СССР. 1981, № 5547-81. 47 с.

3. *Симушкин С.В.* Эмпирический d-апостериорный подход к проблеме гарантийности статистического вывода// Известия ВУЗов. Математика. 1983, № 11. С. 42–58.

4. *Шеффе Г.* Дисперсионный анализ. М.: «Физматлит», 1980. 512 с.

5. *Liu M.C., Taylor R.L.* A consistent nonparametric density estimator for the deconvolution problem // Canadian Journal of Statistics.1989. Vol. 17, No. 4. P. 427–438.

6. *Carroll R.J., Hall P.* Optimal rates of convergence for deconvolving a density // J. Am. Stat. Assoc. 1988. Vol. 83, No. 404. P. 1184–1186.

7. *Stefanski L.A., Carroll R.J.* Deconvolving kernel density estimators // Statistics, 1990. Vol. 21, No. 2. P. 169–184.

8. *Zaarour E., Simushkin S.V.* Consistency of the Empirical Bayesian Analogue of the Regression Estimation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, No. 1. P. 551–554.

9. *Meister A.* Density estimation with normal measurement error with unknown variance // Statistica Sinica. 2006, Vol. 16. P. 195–211.

EMPIRICAL ANALOGUES OF STATISTICAL TESTS WITH GUARANTEED CONCLUSION

E. A. Zaarour[1] [0009-0008-8585-4174], S. V. Simushkin[2] [0000-0003-2544-0267]

[1, 2]*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

[1]zrwrz05@gmail.com, [2]smshkn@gmail.com

Abstract

Methods of kernel estimation of a priori density in the deconvolution problem are used to construct guaranteed procedures for distinguishing between two one-sided hypotheses. The situation is considered when the observed random variable is the sum of an unknown parameter and a centered normal error with a known variance. Consistent empirical estimates are constructed for the d-posterior risk function. The convergence of the corresponding critical constant to the optimal value is established.

The accuracy of the procedures is illustrated numerically on three variants of the prior distribution.

***Keywords**: Empirical Bayesian approach, deconvolution problem, guaranteed statistical inference, d-posterior approach.*

REFERENCES

1. *Simushkin D.S., Simushkin S.V., Volodin I.N.* On the d-posterior approach to the multiple testing problem // Journal of Statistical Computation and Simulation. 2021. Vol. 91, No. 4. P. 651-666.
2. *Simushkin D.S.* Optimal d-guarantee procedures for distinguishing two hypotheses // Dep. VINITI AN USSR. 1981, № 5547-81. 47 p.
3. *Simushkin D.S.* Empirical d- posterior approach to the problem of guarantee of statistical inference // Izvestiya VUZov. Mathematics. 1983, № 11. P. 42–58.
4. *Scheffe G.* The analysis of variance. N-Y.: J. Wiley & Sons, 1980. 512 p.
5. *Liu M.C., Taylor R.L.* A consistent nonparametric density estimator for the deconvolution problem // Canadian Journal of Statistics.1989. Vol. 17, No. 4. P. 427–438.
6. *Carroll R.J., Hall P.* Optimal rates of convergence for deconvolving a density // J. Am. Stat. Assoc. 1988. Vol. 83, No. 404. P. 1184–1186.
7. *Stefanski L.A., Carroll R.J.* Deconvolving kernel density estimators // Statistics, 1990. Vol. 21, No. 2. P. 169–184.
8. *Zaarour E., Simushkin S.V.* Consistency of the Empirical Bayesian Analogue of the Regression Estimation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, No. 1. P. 551–554.
9. *Meister A.* Density estimation with normal measurement error with unknown variance // Statistica Sinica. 2006, Vol. 16. P. 195–211.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

СИМУШКИН Сергей Владимирович – 1956 года рождения, учился в Казанском государственном университете. В настоящее время работает доцентом на кафедре математической статистики К(П)ФУ.

Область научных интересов: гарантийные процедуры статистического вывода-проверка гипотез, точечное и доверительное оценивание, процедуры множественного тестирования в байесовской парадигме.

Sergey Vladimirovich SIMUSHKIN – born in 1956, studied at Kazan State University. Currently, he works as an associate professor at the Department of Mathematical Statistics of Kazan Federal University.

Research interests: optimal guarantee procedures for ensuring statistical inference – hypothesis testing, point and confidence estimation, multiple testing procedures in the Bayesian paradigm.

email: smshkn@gmail.com

ORCID: 0000-0003-2544-0267

ЗААРУР Эзеддин Абдулмуин – родился в Сирии в 1995 году, аспирант четвертого курса по кафедре математической статистики Казанского федерального университета.

Область научных интересов: регрессионный анализ, байесовская регрессия, оптимальные статистические процедуры, программирование.

Ezeddeen Abdulmueen ZAAROUR – born in Syria in 1995, fourth-year postgraduate student at Kazan Federal University, Department of Mathematical Statistics, specialty 1.1.4 Probability Theory and Mathematical Statistics.

Research interests: regression analysis, Bayesian regression, optimal statistical procedures – hypothesis testing, programming.

email: zrwrz05@gmail.com

ORCID: 0009-0008-8585-4174

Материал поступил в редакцию 25 мая 2025 года