

УДК 539.3

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕРМОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ГРИНА – НАГДИ III ТИПА ДЛЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ НА ОСНОВЕ ФИЗИЧЕСКИ ИНФОРМИРОВАННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Я. А. Вахтерова<sup>1</sup> [0000-0002-1026-649X], Д. А. Леонтьева<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup>Московский авиационный институт

Национальный исследовательский университет, г. Москва, Россия

<sup>1</sup>yana-vahterova@mail.ru, <sup>2</sup>dasha.leon.ra@gmail.com

### **Аннотация**

Исследована обратная задача идентификации безразмерного коэффициента теплопроводности  $\kappa$  для уравнения Грина – Нагди III типа, которое описывает распространение тепловых возмущений с конечной скоростью и учитывает инерционные эффекты теплового потока. Для обратной задачи нарушается требование устойчивости (критерий Адамара), в результате чего даже минимальные искажения данных ведут к значительным ошибкам идентификации параметра. В качестве метода решения задачи идентификации использован подход на основе физически информированных нейронных сетей (ФИНС), сочетающий возможности глубокого обучения с априорными знаниями о структуре дифференциального уравнения. Параметр  $\kappa$  включен в число обучаемых переменных, а функция потерь сформирована на основе дифференциального уравнения, граничных условий, начальных условий и зашумленных экспериментальных данных с точечного датчика. Представлены результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие высокую точность восстановления параметра (погрешность менее 0.03%) и устойчивость метода к наличию аддитивного гауссовского шума в данных. Метод ФИНС показал себя как эффективный инструмент решения некорректных обратных задач математической физики.

**Ключевые слова:** обратная задача, модель Грина – Нагди III типа, термоупругость, глубокое машинное обучение, физически информированные нейронные сети.

## ВВЕДЕНИЕ

В работе основное внимание уделено решению обратной задачи идентификации безразмерного коэффициента теплопроводности к по зашумленным экспериментальным данным. Обратные задачи, к классу которых относится идентификация параметров дифференциальных уравнений, представляют собой одну из наиболее сложных проблем вычислительной математики [1]. Их фундаментальная сложность обусловлена некорректностью по Адамару [2], что проявляется прежде всего в неустойчивости решения: сколь угодно малые погрешности в исходных данных (погрешности измерений, численные шумы) могут приводить к сколь угодно большим отклонениям в оценке искомых параметров. Традиционные подходы к решению подобных задач [3, 4], такие как итерационные методы (например, метод Левенберга – Марквардта), требуют многократного решения прямой задачи на каждой итерации для вычисления градиента функционала невязки. Для сложных нелинейных моделей, подобных уравнению Грина – Нагди III типа [5], это приводит к огромным вычислительным затратам.

В рамках настоящего исследования разработан и реализован подход к решению рассматриваемой задачи на основе физически информированных нейронных сетей (ФИНС) с помощью фреймворка глубокого обучения PyTorch [6], который позволяет преодолеть указанные вычислительные трудности.

Выполнены следующие этапы исследования.

- Построение архитектуры ФИНС: разработана архитектура нейронной сети, принципиальной особенностью которой является включение физического параметра  $k$  в число обучаемых переменных наравне с весами и смещениями сети.
- Разработка функции потерь: сконструирована специальная функция потерь, включающая четыре компонента:

$L_{PDE}$  : функция потерь для дифференциального уравнения;

$L_{IC}$  : функция потерь для начальных условий;

$L_{BC}$  : функция потерь для граничных условий;

$L_s$  : функция потерь для экспериментальных данных.

- Реализация механизма автоматического дифференцирования: для вычисления производных высокого порядка, необходимых для расчета слагаемого  $L_{PDE}$ , использован модуль `torch.autograd` фреймворка PyTorch.
- Генерация синтетических данных: на основе аналитического решения [2] сгенерированы зашумленные «экспериментальные» данные для различных значений параметра  $\kappa$  и различных уровней шума.
- Вычислительные эксперименты: проведена серия расчетов по идентификации параметра  $\kappa$  при различных начальных приближениях и уровнях шума в данных.
- Анализ устойчивости: исследована чувствительность метода к наличию шума в исходных данных и определены пределы применимости подхода.

### 1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГРИНА – НАГДИ III ТИПА

Решение обратной задачи идентификации параметра  $\kappa$  в уравнении теплопроводности Грина – Нагди III типа требует предварительного анализа решения соответствующей прямой задачи [7] и наличия эталонного аналитического решения. Прямая задача для рассматриваемого уравнения относится к классическим: при стандартных граничных условиях на конечном интервале она допускает точное решение методом разделения переменных.

Математическая постановка задачи формулируется следующим образом (см. рис. 1).

Необходимо определить температурное поле  $\vartheta(x, t)$  в однородной одномерной среде на конечном отрезке  $x \in [0, 1]$ , в момент времени  $t > 0$  описываемое уравнением Грина – Нагди III типа

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial t \partial x^2} + \tilde{\kappa} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial q^{(e)}}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $x \in [0, 1]$  – пространственная координата вдоль стержня,  $t$  – время,  $c_\varepsilon$  – коэффициент удельной теплоемкости при постоянной деформации,  $\rho$  – плотность ма-

териала,  $q^{(e)}$  – массовая плотность объемных источников тепла,  $\vartheta = T - T_0$  – приращение температуры,  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности,  $\tilde{\kappa}$  – скорость теплопроводности.

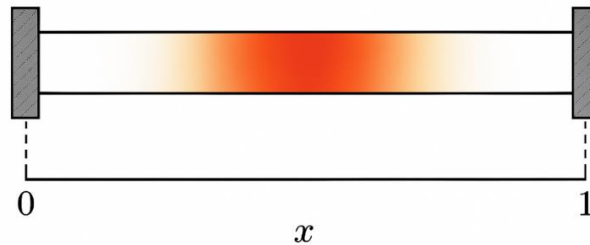


Рис. 1. Постановка задачи

В безразмерной форме данное уравнение теплопереноса можно записать как

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}.$$

Здесь введены следующие безразмерные переменные:

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad t = \frac{c_T t^*}{L}, \quad c_T^2 = \frac{\tilde{\kappa}}{\rho c_\varepsilon}, \quad \vartheta = \frac{\vartheta^*}{T_0}, \quad \kappa = \frac{\kappa^*}{\rho c_\varepsilon c_T L}.$$

Запишем нулевые граничные условия

$$\vartheta(0, t) = 0, \quad \vartheta(1, t) = 0.$$

В начальный момент времени стержень нагревается на величину  $\sin(\pi x)$ :

$$\vartheta(x, 0) = \sin(\pi x), \quad \frac{\partial \vartheta(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

## 1.2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГРИНА – НАГДИ III ТИПА

Прямая задача теплопереноса, описываемая уравнением (1), при типичных начально-граничных условиях на конечном интервале допускает строгое аналитическое решение методом разделения переменных. Стандартная процедура приводит к спектральному разложению по собственным функциям решения соответствующей краевой задачи и явным формулам для временных коэффициентов, что делает полученное решение удобным эталоном для валидации предлагаемого численного подхода к обратной задаче идентификации параметров.

Итоговое аналитическое выражение имеет вид

$$\vartheta(x, t) = \begin{cases} e^{-\frac{\pi^2 \kappa}{2} t} \left[ \cos(\omega t) + \frac{\pi^2 \kappa}{2\omega} \sin(\omega t) \right] \sin(\pi x), & \kappa < \frac{2}{\pi}, \\ e^{-\frac{\pi^2 \kappa}{2} t} \left( 1 + \frac{\pi^2 \kappa}{2} t \right) \sin(\pi x), & \kappa = \frac{2}{\pi}, \\ \left[ C_1 e^{r_+ t} + C_2 e^{r_- t} \right] \sin(\pi x), & \kappa > \frac{2}{\pi}, \end{cases}$$

где

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{4\pi^2 - \pi^4 \kappa^2}, \quad r_{\pm} = \frac{-\pi^2 \kappa \pm \sqrt{\pi^4 \kappa^2 - 4\pi^2}}{2}, \quad C_1 = \frac{-r_-}{r_+ - r_-}, \quad C_2 = \frac{r_+}{r_+ - r_-}.$$

Отметим, что прямая задача является корректной по Адамару: при заданном параметре  $\kappa$  существует единственное устойчивое решение. Однако, как будет показано далее, обратная задача идентификации параметра  $\kappa$  по экспериментальным данным является некорректной, что составляет основную трудность настоящего исследования.

Наличие корректной постановки прямой задачи и точного аналитического решения создает необходимый фундамент для комплексного исследования обратной задачи идентификации параметров и оценки эффективности предложенного подхода на основе физически информированных нейронных сетей.

## 2.1. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (1)

Обратная задача для уравнения теплопроводности Грина – Нагди III типа (1) формулируется как задача определения безразмерного коэффициента теплопроводности  $\kappa$  на основе экспериментальных данных о температуре в фиксированной точке стержня.

Введем точечный датчик, расположенный в позиции  $x_s = 0,9$ , который регистрирует эволюцию температуры во времени. Математически зашумленные данные  $\theta(x_s, t)$  моделируем как

$$\theta(x_s, t_i) = \theta(x_s, t_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N_s,$$

где  $\theta(x_s, t)$  – истинное (аналитическое) значение отклика в точке  $x_s = 0,9$  в момент времени  $t_i$ ,  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$  – добавленная гауссовская шумовая компонента

с математическим ожиданием 0 и дисперсией  $\sigma^2$ ,  $\sigma$  – стандартное отклонение шума, задаваемое параметром `noise_level` в коде,  $N_s$  – количество временных точек (размер выборки сенсорных данных).

## 2.2. ПРОБЛЕМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Ключевой особенностью обратной задачи является некорректность по Адамару, в особенности нарушение устойчивости решения. Как известно, задача называется корректной по Адамару, если ее решение удовлетворяет трем условиям:

1. существование: для любых допустимых входных данных решение должно существовать,
2. единственность: решение должно быть единственным для заданных входных данных,
3. устойчивость: решение должно непрерывно зависеть от входных данных. Малые изменения в данных должны приводить к малым изменениям в решении.

Задача, не удовлетворяющая хотя бы одному из этих условий, называется некорректной.

Анализ обратной задачи идентификации параметра в уравнении (1) показал, что вследствие ее некорректности по Адамару главным и наиболее критичным недостатком является нарушение устойчивости. Задача обладает экспоненциальной чувствительностью: ничтожно малые погрешности в исходных данных (шум измерений, ошибки округления) приводят к произвольно большим ошибкам в восстанавливаемом параметре. Прямое решение задачи без применения специальных методов не имеет практического смысла, так как результат будет полностью определяться шумом, а не полезным сигналом.

Для получения осмысленного и устойчивого решения требуется регуляризация – модификация постановки задачи с целью сделать ее условно - корректной. В настоящем исследовании это достигается за счет использования подхода на основе физически информированных нейронных сетей, который вводит в задачу априорные физические знания (дифференциальное уравнение, граничные и начальные условия), выступающие в роли естественного регуляризатора.

### 3.1. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ФИЗИЧЕСКИ ИНФОРМИРОВАННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Физически информированные нейронные сети (ФИНС), или Physics-Informed Neural Networks (PINN) [8], представляют собой специальный класс нейронных сетей, разработанный для решения задач математической физики, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП). Ключевая идея ФИНС заключается в интеграции априорных физических знаний непосредственно в архитектуру и процесс обучения нейронной сети. В отличие от традиционных подходов машинного обучения, где нейронная сеть обучается исключительно на данных, ФИНС дополнительно использует информацию о физических законах, описываемых ДУЧП, а также о начальных и граничных условиях.

Для преодоления фундаментальной некорректности обратной задачи идентификации параметра  $\kappa$  в уравнении (1) нами применены ФИНС. Ключевая идея метода заключается в совместной оптимизации параметров сети и физического параметра  $\kappa$  путем введения в функцию потерь слабых ограничений, обеспечивающих удовлетворение исходному дифференциальному уравнению, начальным и граничным условиям, а также экспериментальным данным. Это позволяет естественным образом регуляризовать задачу.

Нейронная сеть обучалась одновременно:

- аппроксимировать решение  $\theta(x, t)$  поля температуры;
- находить значение физического параметра  $\kappa$

### 3.2 АРХИТЕКТУРА НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Для аппроксимации температурного поля  $\theta(x, t)$  использована полносвязная нейронная сеть [9–12] с архитектурой, включающей (рис. 2):

- входной слой с двумя нейронами, принимающими пространственно-временные координаты  $(x, t)$ ;
- три скрытых слоя по 64 нейрона в каждом с Tanh-функцией активации;
- выходной слой с одним нейроном, возвращающим значение температуры.

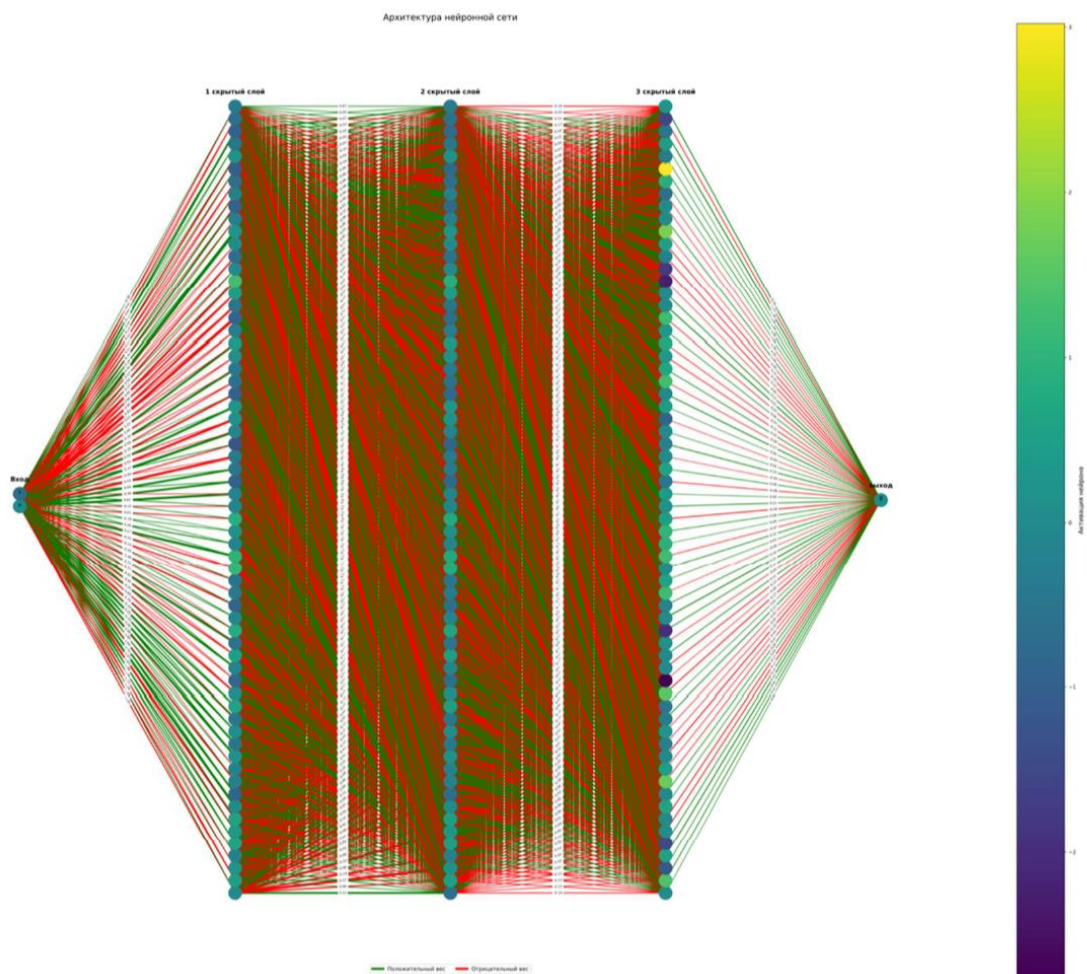


Рис. 2. Архитектура нейронной сети

### 3.3. ГЕНЕРАЦИЯ КОЛЛОКАЦИОННЫХ ТОЧЕК

Для обеспечения выполнения физических ограничений генерируются четыре типа точек (рис. 3):

- $N_f = 10000$  точек внутри области для контроля выполнения дифференциального уравнения;
- $N_{ic} = 100$  точек на начальном временном слое для выполнения начальных условий;
- $N_{bc} = 100$  точек на границах пространственной области для удовлетворения граничным условиям;
- $N_s = 100$  точек в месте расположения датчика ( $x_s = 0,9$ ) для соответствия экспериментальным данным.



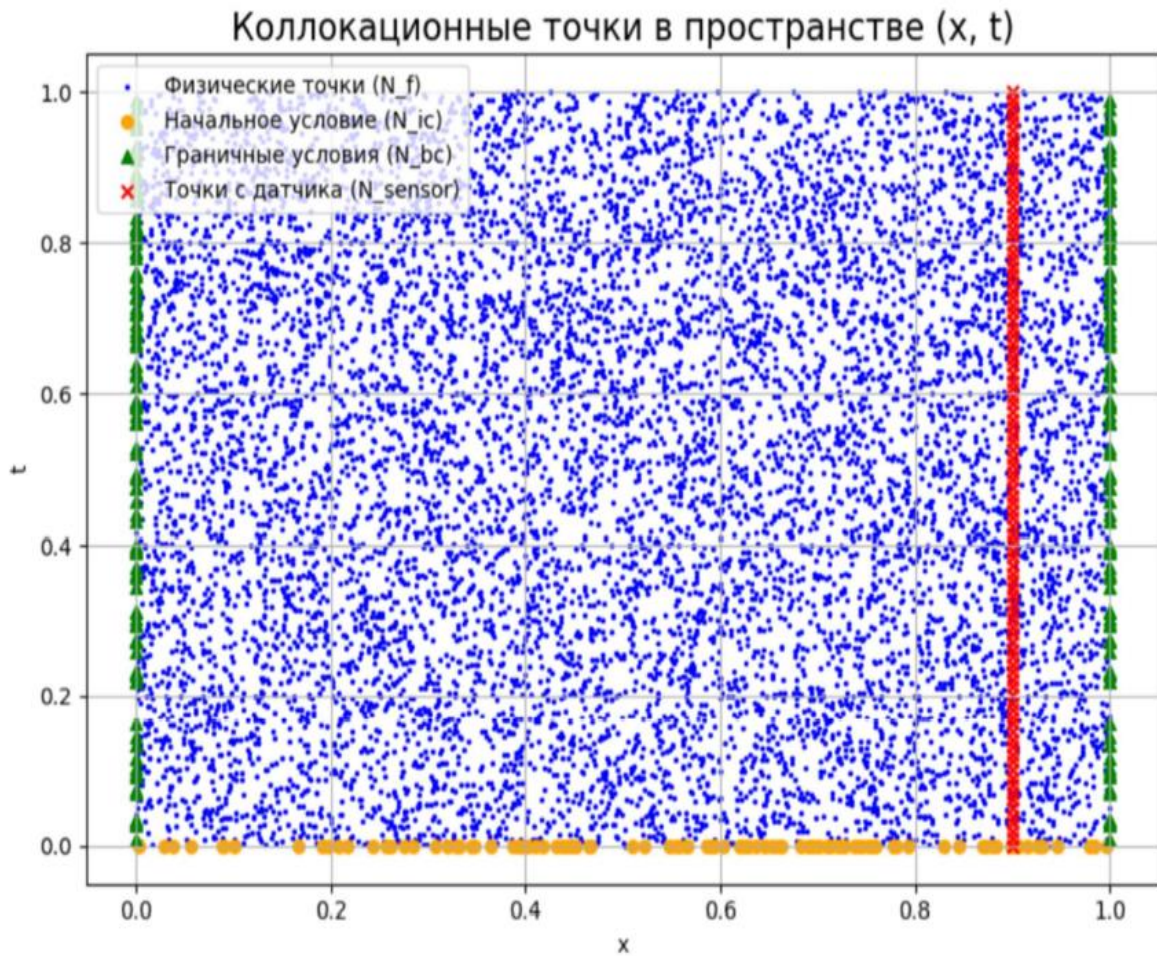


Рис. 3. Коллокационные точки в пространстве

### 3.4. ФУНКЦИЯ ПОТЕРЬ

Функция ошибки (потерь) в методе физически информированных нейронных сетей представляет собой составной функционал, который обеспечивает одновременное выполнение нескольких физических и математических условий. Для обратной задачи идентификации параметра  $\kappa$  в уравнении (1) функция ошибки имеет следующий вид:

$$L(x, t, \kappa) = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} [\theta_t(x_f^{(i)}, t_f^{(i)}) - (\kappa \theta_{xxt}(x_f^{(i)}, t_f^{(i)}) + \theta_{xx}(x_f^{(i)}, t_f^{(i)}))]^2 +$$

$$\frac{1}{N_{ic}} \sum_{i=1}^{N_{ic}} (\theta_{xx}(x_{ic}^{(i)}, 0) - \sin(\pi x_{ic}^{(i)}))^2 + \frac{1}{N_{ic}} \sum_{i=1}^{N_{ic}} (\theta_t(x_{ic}^{(i)}, 0))^2 + \frac{1}{N_{bc}} \sum_{i=1}^{N_{bc}} (\theta(0, t_{bc}^{(i)}))^2 +$$

$$\frac{1}{N_{bc}} \sum_{i=1}^{N_{bc}} (\theta(1, t_{bc}^{(i)}))^2 + \frac{1}{N_{bc}} \sum_{i=1}^{N_{bc}} (\theta(x_s, t_s^{(i)}) - \theta_s^{(i)})^2.$$

Здесь  $L_{PDE}$  – отклонение от дифференциального уравнения;  $L_{IC}$  – отклонение от начальных условий;  $L_{BC}$  – отклонение от граничных условий;  $L_s$  – отклонение от экспериментальных данных.

### 3.5. ОБУЧЕНИЕ

Процесс обучения физически информированной нейронной сети для решения обратной задачи представляет собой итерационную процедуру совместной оптимизации параметров сети и физического коэффициента  $\kappa$  с использованием алгоритма Adam (Adaptive Moment Estimation).

Процесс начинается с задания начальных значений: скорости градиентного спуска  $\eta$ , которая определяет величину шага на каждой итерации; параметров алгоритма (смещения)  $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1)$ , которые отвечают за степень влияния предыдущих значений градиентов на текущие расчеты; вектора  $\theta_0$  обучаемых переменных  $\theta$ ; первого и второго моментов градиента функции  $L(\theta)$ :  $m_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ; задается также малая величина  $\varepsilon \ll 1$ ; для обеспечения численной стабильности.

На каждой итерации алгоритма с номером  $k = 1, 2, 3 \dots$  выполняются следующие действия.

Сначала вычисляем градиент функции по обучаемым переменным – вектор, указывающий направление ее наискорейшего роста:  $g_k = \nabla_{\theta} L(\theta_{k-1})$ .

Затем обновляем оценки первых и вторых моментов градиента. Первый момент можно рассматривать как сглаженную траекторию градиента, а второй – как накопленную информацию о квадратах градиентов:

$$m_k = \beta_1 m_{k-1} + (1 - \beta_1) g_k, \quad v_k = \beta_2 v_{k-1} + (1 - \beta_2) g_k^2.$$

Поскольку начальные значения моментов равны нулю, на начальных этапах обучения может возникать смещение. Для его компенсации вычисляем оценки первого и второго моментов с поправкой на смещения. Эти поправки особенно важны в начале процесса обучения:

$$\hat{m}_k = \frac{m_k}{(1 - \beta_1^k)}, \quad \hat{v}_k = \frac{v_k}{(1 - \beta_2^k)}.$$

Далее выполняем корректировку обучаемых переменных. Размер шага для каждого параметра адаптивно регулируется: он уменьшается для параметров

с большими градиентами и увеличивается для тех, градиенты которых были малыми:

$$\theta_k = \theta_{k-1} - \eta \frac{m_k}{\sqrt{\hat{v}_k + \varepsilon}}.$$

Это позволяет эффективно работать с разреженными градиентами и ускоряет сходимость. Благодаря этому алгоритм Adam демонстрирует высокую эффективность при обучении сложных моделей, включая физически - информированные нейронные сети.

#### **4.1. РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ**

В ходе численных экспериментов была проведена успешная идентификация безразмерного коэффициента теплопроводности  $\kappa$  в уравнении (1). Обучение нейронной сети проводилось в течение 25000 эпох (рис. 4). Идентифицированное значение коэффициента теплопроводности  $\kappa$  равно 0,44186335802078247..

Epoch	50	Loss: 2.157e-01	kappa: 0.54532
Epoch	100	Loss: 1.888e-01	kappa: 0.57604
Epoch	150	Loss: 1.238e-01	kappa: 0.64980
Epoch	200	Loss: 3.749e-02	kappa: 0.72703
Epoch	250	Loss: 1.473e-02	kappa: 0.77307
Epoch	300	Loss: 8.393e-03	kappa: 0.78232
Epoch	350	Loss: 5.443e-03	kappa: 0.77596
Epoch	400	Loss: 4.038e-03	kappa: 0.76689
Epoch	450	Loss: 3.221e-03	kappa: 0.75813
Epoch	500	Loss: 2.559e-03	kappa: 0.75054
Epoch	550	Loss: 2.447e-03	kappa: 0.74359
Epoch	600	Loss: 1.996e-03	kappa: 0.73719
Epoch	650	Loss: 1.797e-03	kappa: 0.73166
Epoch	700	Loss: 1.631e-03	kappa: 0.72660
Epoch	750	Loss: 5.789e-03	kappa: 0.72170
Epoch	800	Loss: 1.447e-03	kappa: 0.71665
Epoch	850	Loss: 1.316e-03	kappa: 0.71259
Epoch	900	Loss: 1.219e-03	kappa: 0.70863
Epoch	950	Loss: 1.130e-03	kappa: 0.70471
Epoch	1000	Loss: 2.107e-03	kappa: 0.70091
Epoch	1050	Loss: 1.026e-03	kappa: 0.69698
Epoch	1100	Loss: 9.609e-04	kappa: 0.69399
Epoch	1150	Loss: 9.045e-04	kappa: 0.69097
Epoch	1200	Loss: 8.541e-04	kappa: 0.68792
Epoch	1250	Loss: 8.090e-04	kappa: 0.68481
...			
Epoch	24900	Loss: 9.626e-06	kappa: 0.44191
Epoch	24950	Loss: 1.163e-04	kappa: 0.44197
Epoch	25000	Loss: 1.106e-05	kappa: 0.44186
Final recovered kappa: 0.44186335802078247			

Рис. 4. Обучение нейросети

Наблюдалась устойчивая сходимость метода без признаков переобучения или расходимости. В процессе обучения параметр  $\kappa$  демонстрировал монотонное приближение к эталонному значению.

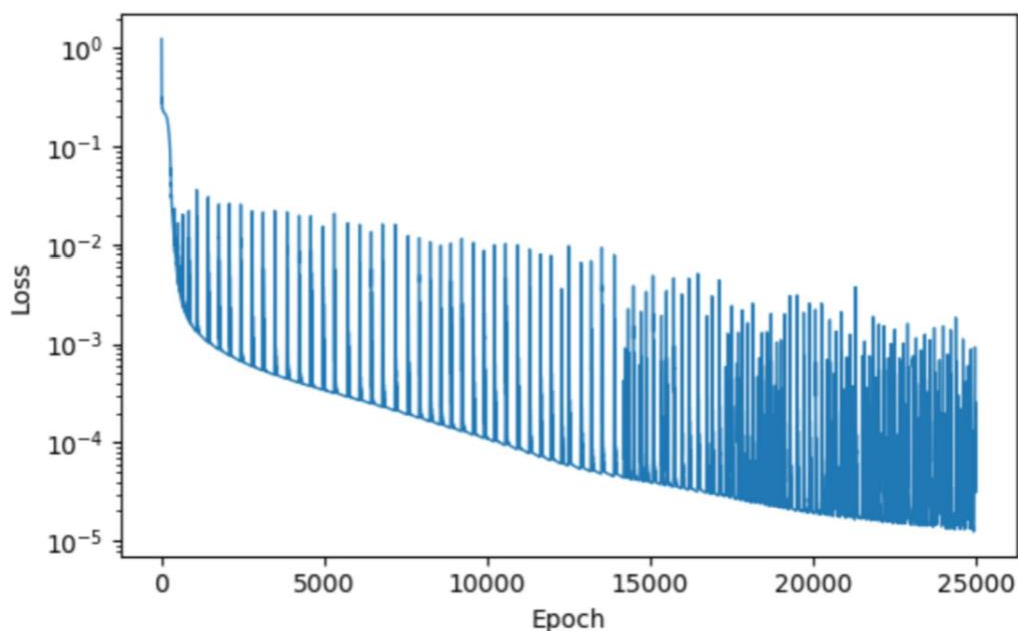


Рис. 5. График функции потерь

Представленный график (рис. 5) является наглядным доказательством эффективности подхода PINN для решения рассматриваемой обратной задачи. Модель продемонстрировала быструю сходимость и достигла высокой точности, что позволяет быть уверенным в корректности полученного решения.

Для оценки точности метода проведено сравнение с эталонным значением  $\kappa_{\text{true}} = 0.442$ :

$$\delta = \frac{|\kappa - \kappa_{\text{true}}|}{\kappa} * 100\% = 0.03\% .$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Успешно решена обратная задача идентификации безразмерного коэффициента теплопроводности  $\kappa$  в уравнении теплопроводности Грина – Нагди III типа с использованием метода ФИНС. Предложенная реализация сочетает вычислительную эффективность методов глубокого обучения с физической обоснованностью традиционных подходов к решению задач математической физики, обеспечивая устойчивое решение обратной задачи идентификации параметра.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00680, <https://rscf.ru/project/23-19-00680/>.)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smirnova V., Semenova E., Prunov V., Zamaliev R.; Sachenkov O. Topological Approach for Material Structure Analyses in Terms of R2 Orientation Distribution Function // Mathematics. 2023. Vol. 11, No. 12. 2639. <https://doi.org/10.3390/math11122639>
2. Hadamard J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivers partielles lineaires hyperbolique. Paris: Hermann, 1932. 542 p.
3. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. Non-stationary influence function for an unbounded anisotropic Kirchhoff–Love shell // Journal of Applied Engineering Science, 2020. Vol. 18, No. 4. P. 737–744. <https://doi.org/10.5937/jaes0-28205>
4. Serdyuk A.O., Fedotenkov G.V. Unsteady bending function for an unlimited anisotropic plate // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta, Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2021. Vol. 25, No. 1. P. 111–126. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1793>
5. Орехов А.А., Рабинский Л.Н., Федотенков Г.В. Фундаментальные решения уравнений классической и обобщенной моделей теплопроводности // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2023. Т. 165(4). С. 404–414. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.404-414>
6. Paszke A., Gross S., Massa F., Lerer A., Bradbury J., Chanan G., Killeen T., Lin Z., Gimelshein N., Antiga L., Desmaison A., Köpf A., Yang E., DeVito Z., Raison M., Tejani A., Chilamkurthy S., Steiner B., Fang L., Bai J., Chintala S. PyTorch: An Imperative Style, High-Performance Deep Learning Library // NeurIPS. 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.01703>
7. Вахтерова Я.А., Рабинский Л.Н. Физически информированная нейронная сеть для решения уравнения теплопроводности Грина-Нагди III типа // СТИН. 2025. №9. С. 28–32.
8. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics Informed Deep Learning (Part I): Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations // arXiv:1711.10561, 2017, URL: <https://arxiv.org/abs/1711.10561v1>. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.10561>
9. Федотенков Г.В., Киреенков А.А. Алгоритм решения контактных задач с использованием технологий глубокого машинного обучения // СТИН. 2024. № 12. С. 24–27. <https://www.elibrary.ru/joqxsg>.

10. Гончаренко В.И., Олешко В.С. Использование искусственных нейронных сетей в неразрушающем контроле деталей авиационной техники // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2024. № 3. С. 30–35.

11. Ivanova A., Kharin N., Baltina T., and Sachenkov O., Muscle tone control system based on LIF model neural network, VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT), Samara, Russian Federation, 2022, pp. 1–4. <https://doi.org/10.1109/ITNT55410.2022.9848650>

12. Ivanova A., Kharin N., Smirnova V., Tufanova E., Sachenkov O. Stabilization of a pendulum on an elastic foundation using a multilayer perceptron// Journal of Physics: Conference Series. 2022. Vol. 2308. 012005. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2308/1/012005>.

---

## **INVERSE PROBLEM OF IDENTIFICATION OF THERMOPHYSICAL PARAMETERS OF THE GREEN-NAGDI TYPE III MODEL FOR AN ELASTIC ROD BASED ON A PHYSICALLY INFORMED NEURAL NETWORK**

**Y. A. Vakhterova**<sup>1</sup> [0000-0002-1026-649X], **D. A. Leonteva**<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

<sup>1</sup>[yana-vakhterova@mail.ru](mailto:yana-vakhterova@mail.ru), <sup>2</sup>[dasha.leon.ra@gmail.com](mailto:dasha.leon.ra@gmail.com)

### **Abstract**

In this paper, we study the inverse problem of identifying the dimensionless thermal conductivity coefficient for the Green–Naghdi equation of type III, which describes the propagation of thermal disturbances with a finite velocity and takes into account the inertial effects of heat flux. For the inverse problem, the stability requirement (Hadamard criteria) is violated, as a result of which even minimal data distortions lead to significant errors in parameter identification. As a solution method, we use an approach based on physically informed neural networks (PINN), which combines the capabilities of deep learning with a priori knowledge of the structure of the differential equation. The parameter is included among the trained variables, and the loss function is formed based on the deviation from the differential equation, boundary conditions, initial conditions, and noisy experimental data from a point sensor. The results of computational experiments are presented, demonstrating high accuracy of parameter re-

covery (error less than 0.03%) and the stability of the method with respect to the presence of additive Gaussian noise in the data. The PINN method has proven itself to be an effective tool for solving ill-posed inverse problems of mathematical physics.

**Keywords:** *inverse problem, Green-Naghdi model type III, thermoelasticity, deep machine learning, physics informed neural networks.*

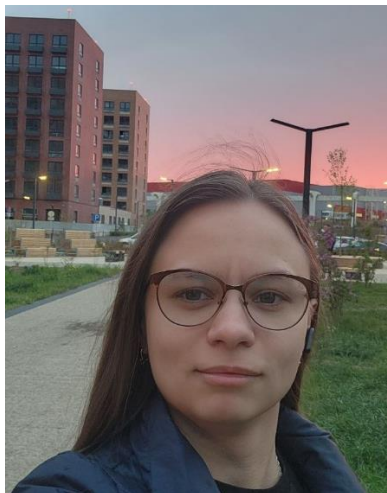
## REFERENCES

1. Smirnova V., Semenova E., Prunov V., Zamaliev R.; Sachenkov O. Topological Approach for Material Structure Analyses in Terms of R2 Orientation Distribution Function // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, No. 12. 2639. <https://doi.org/10.3390/math11122639>
2. Hadamard J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivers partielles lineaires hyperbolique. Paris: Hermann, 1932. 542 p.
3. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. Non-stationary influence function for an unbounded anisotropic Kirchhoff–Love shell // *Journal of Applied Engineering Science*, 2020. Vol. 18, No. 4. P. 737–744. <https://doi.org/10.5937/jaes0-28205>
4. Serdyuk A.O., Fedotenkov G.V. Unsteady bending function for an unlimited anisotropic plate // *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta, Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021. Vol. 25, No. 1. P. 111–126. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1793>
5. Orekhov A.A., Rabinskij L.N., Fedotenkov G.V. Fundamental'nye re-sheniya uravnenij klassicheskoy i obobshchennoj modelej teploprovodnosti // *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*. 2023. T. 165(4). S. 404–414. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.404-414>
6. Paszke A., Gross S., Massa F., Lerer A., Bradbury J., Chanan G., Killeen T., Lin Z., Gimelshein N., Antiga L., Desmaison A., Köpf A., Yang E., DeVito Z., Raison M., Tejani A., Chilamkurthy S., Steiner B., Fang L., Bai J., Chintala S. PyTorch: An Imperative Style, High-Performance Deep Learning Library // *NeurIPS*. 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.01703>
7. Vahterova YA.A., Rabinskij L.N. Fizicheski informirovannaya nejronnaya set' dlya resheniya uravneniya teploprovodnosti Grina-Nagdi III tipa // *STIN*. 2025. №9. S. 28–32.



8. *Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E.* Physics Informed Deep Learning (Part I): Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations // arXiv:1711.10561, 2017, URL: <https://arxiv.org/abs/1711.10561v1>.  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.10561>
  9. *Fedotenkov G.V., Kireenkov A.A.* Algoritm resheniya kontaktnykh zadach s ispol'zovaniem tekhnologij glubokogo mashinnogo obucheniya // STIN. 2024. № 12. S. 24–27. <https://www.elibrary.ru/joqxsg>.
  10. *Goncharenko V.I., Oleshko V.S.* Ispol'zovanie iskusstvennykh neyronnykh setej v nerazrushayushchem kontrole detalej aviacionnoj tekhniki // Izvestiya vysshih uchebnykh zavedenij. Aviacionnaya tekhnika. 2024. № 3. S. 30–35.
  11. *Ivanova A., Kharin N., Baltina T., Sachenkov O.* Muscle tone control system based on LIF model neural network // VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT), Samara, Russian Federation, 2022. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/ITNT55410.2022.9848650>
  12. *Ivanova A., Kharin N., Smirnova V., Tufanova E., Sachenkov O.* Stabilization of a pendulum on an elastic foundation using a multilayer perceptron // Journal of Physics: Conference Series. 2022. Vol. 2308. 012005.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/2308/1/012005>.
-

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

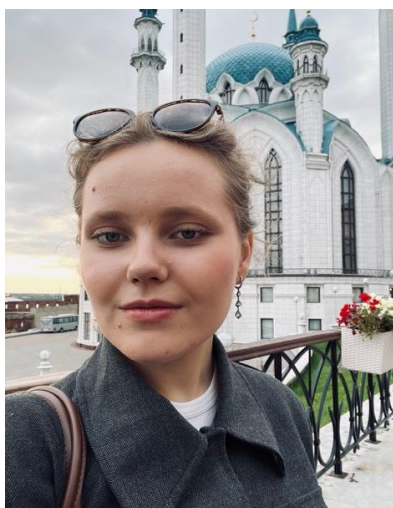


**ВАХТЕРОВА Яна Андреевна** – к. ф.-м. н., доцент кафедры 902 «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института. Научные интересы: механика деформируемого твердого тела (динамика, термоупругость, волновые задачи, упругое полупространство); обратные нестационарные задачи идентификации параметров, нагрузок и источников по частичным измерениям; физически информированные нейронные сети для решения прямых и обратных нестационарных задач механики

**Yana Andreevna VAKHTEROVA** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Department 902 "Strength of Materials, Dynamics and Strength of Machines" of the Moscow Aviation Institute. Research interests: mechanics of deformable solids (dynamics, thermoelasticity, wave problems, elastic half-space); inverse non-stationary problems of identifying parameters, loads and sources from partial measurements; physically informed neural networks for solving direct and inverse non-stationary problems of mechanics

email: yana-vahterova@mail.ru

ORCID: 0000-0002-1026-649X



**ЛЕОНТЬЕВА Дарья Андреевна** – студентка 4 курса бакалавриата Института №6 «Аэрокосмический», профиль обучения «Прикладная механика» Московского авиационного института, техник кафедры 902 «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института

**Darya Andreevna LEONTYEVA** – 4th year student of the bachelor's degree program at the Institute No. 6 "Aerospace", majoring in "Applied Mechanics" at the Moscow Aviation Institute, technician at the Department 902 "Strength of Materials, Dynamics and Strength of Machines" at the Moscow Aviation Institute

email: dasha.leon.ra@gmail.com

*Материал поступил в редакцию 8 сентября 2025 года*