УДК 514.12, 514.14

МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ СО ШКОЛЬНИКАМИ И СТУДЕНТАМИ МЛАДШИХ КУРСОВ

В. В. Шурыгин[1] [0000-0002-4325-214X], **В. В. Шурыгин (мл.)**[2] [0000-0001-9771-1447]

[1, 2]*Казанский федеральный университет, Казань*

[1]Vadim.Shurygin@kpfu.ru, [2]1Vadim.Shurygin@kpfu.ru

Аннотация

Рассмаотрены некоторые подходы к преподаванию многомерной геометрии на факультативных занятиях, направленные на развитие у школьников и студентов многомерной геометрической интуиции. Особое внимание уделено использованию групп преобразований при исследовании геометрии правильных многогранников.

***Ключевые слова*:** Трехмерная сфера, многомерная геометрия, четырехмерная геометрия, четырехмерный куб, четырехмерный правильный многогранник, 24-ячейка.

МНОГОМЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в трехмерном геометрическом пространстве E_3 задается точкой O и тройкой единичных взаимно ортогональных (перпендикулярных) векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Набор (O; $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$) называется ортонормированным репером. Координатами вектора $\mathbf{a}$ из E_3 по отношению к реперу (O; $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$) являются коэффициенты $\{a_x, a_y, a_z\}$ разложения

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$$

вектора $\mathbf{a}$ по векторам репера. Координатами точки A являются координаты (x_A,y_A,z_A) ее радиус-вектора $\mathbf{r}_A=\overrightarrow{OA}$:

$$\mathbf{r}_A=x_A\mathbf{i}+y_A\mathbf{j}+z_A\mathbf{k}.$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ можно представить в виде

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A,$$

поэтому координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ являются разности координат точек B и A. Скалярное произведение векторов ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$) вычисляется по формуле

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Модуль вектора **a** и угол φ между векторами **a** и **b** вычисляются по формулам

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}, \quad \cos\varphi=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}, \tag{1}$$

расстояние $d(A,B)$ между точками A и B вычисляется по формуле

$$d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|. \tag{2}$$

Евклидово n-мерное пространство устроено аналогично трехмерному евклидову пространству. Приведем некоторые необходимые определения, относящиеся к строению этого пространства.

Множество точек этого пространства обозначается символом E_n, а множество векторов символом $\mathbf{E}_n$. Для векторов из $\mathbf{E}_n$ определены операции сложения $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и умножения вектора на вещественное число $\lambda\mathbf{a}$, в частности, можно образовывать линейные комбинации

$$\lambda^1\mathbf{a}_1+\lambda^2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda^m\mathbf{a}_m \tag{3}$$

векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m$. Линейная комбинация, все коэффициенты которой равны нулю, является нулевым вектором. Такая линейная комбинация называется тривиальной. Если нулевому вектору равна только тривиальная линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\ldots, \mathbf{a}_m$, эти векторы называются линейно независимыми, при этом никакой из этих векторов нельзя представить в виде линейной комбинации других. В противном случае векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m$ называются линейно зависимыми. Множество $\mathbf{E}_n$ с операциями сложения векторов и умножения вектора на число является векторным пространством размерности n, то есть любые n+1 векторов в $\mathbf{E}_n$ являются линейно зависимыми, и имеется набор $\{\mathbf{e}_i\}$, i=1,…,n, состоящий из линейно независимых векторов. Такой набор $\{\mathbf{e}_i\}$, i=1,…,n, называется базисом в $\mathbf{E}_n$. Всякий вектор **a** из $\mathbf{E}_n$ можно представить в виде линейной комбинации

$$\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+\ldots+a^n\mathbf{e}_n \tag{4}$$

векторов базиса. Коэффициенты $a^1, a^2,\ldots,a^n$ разложения (4) называются координатами вектора **a**.

В пространстве $\mathbf{E}_n$ определена операция скалярного произведения векторов, то есть билинейное соответствие (билинейная форма)

$$g: \mathbf{E}_n\times\mathbf{E}_n\ni\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}\rightarrow(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathbf{R},$$

относящее двум векторам вещественное число, такое что соответствие

$$\mathbf{E}_n\ni\mathbf{a}\rightarrow(\mathbf{a}, \mathbf{a})\in\mathbf{R}$$

является положительно определенной квадратичной формой. Таким образом, скалярный квадрат $\mathbf{a}^2=(\mathbf{a},\mathbf{a})$ всякого ненулевого вектора является положительным числом. Число $|\mathbf{a}|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}$ называется модулем или длиной вектора **a**. Если (**a**, **b**)=0, векторы **a** и **b** называются ортогональными.

Базис $\{\mathbf{e}_i\}$, $i=1,\ldots,n$, в $\mathbf{E}_n$ называется ортонормированным, если он состоит из взаимно ортогональных векторов единичной длины.

В координатах в $\mathbf{E}_n$, определяемых ортонормированным базисом, скалярное произведение векторов вычисляется по формуле

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=a^1b^1+a^2b^2+\ldots+a^nb^n.$$

При этом модуль вектора **a** и угол φ между векторами **a** и **b** вычисляются по формулам (1).

Имеют место соотношения между точками и векторами, аналогичные соотношениям в E_3: двум точкам A и B пространства E_n однозначно относится вектор $\overrightarrow{AB}\in\mathbf{E}_n$, а точке $A\in E_n$ и вектору $\mathbf{v}\in\mathbf{E}_n$ соответствует единственная точка $B\in E_n$, такая что $\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}$, и при этом выполняется равенство треугольника $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Расстояние $d(A,B)$ между точками A и B в E_n определяется формулой (2).

Набор $(O,\{\mathbf{e}_i\})$, состоящий из точки $O\in E_n$ и ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ пространства $\mathbf{E}_n$, называется ортонормированным репером в E_n. Координатами точки A в системе координат, определяемой ортонормированным репером (такая система координат называется прямоугольной), являются координаты ее радиус-вектора $\mathbf{r}_A=\overrightarrow{OA}$:

$$\mathbf{r}_A=x_A{}^1\mathbf{e}_1+x_A{}^2\mathbf{e}_2+\ldots+x_A{}^n\mathbf{e}_n.$$

Все евклидовы n-мерные пространства изоморфны (эквивалентны). Изоморфизм (эквивалентность) пространств E_n и E'_n осуществляется выбором в них некоторых ортонормированных реперов $(O, \{\mathbf{e}_i\})$ и $(O', \{\mathbf{e}'_i\})$ и установлением соответствия между точками, имеющими одинаковые координаты. Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$, точки и векторы которого представляют собой наборы из n чисел (x^i) и $\{a^i\}$, $i=1,\ldots,n$, называется *стандартным* n-мерным евклидовым пространством.

В векторном пространстве $\mathbf{E}_n$ подпространство $\mathbf{L}_m$ размерности m задается набором из m линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_m$ и состоит из всех векторов, представимых в виде линейных комбинаций (3). Векторы $\mathbf{x}\in\mathbf{E}_n$, ортогональные всем векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m$, являются решениями системы уравнений

$$(\mathbf{a}_1,\mathbf{x})=0,\ (\mathbf{a}_2,\mathbf{x})=0,\ldots,(\mathbf{a}_m,\mathbf{x})=0,$$

и образуют подпространство $\mathbf{L}_m^{\perp}$ размерности $n-m$, называемое ортогональным дополнением подпространства $\mathbf{L}_m$. Если $\mathbf{b}_\alpha$, $\alpha=1,\ldots,n-m$, – линейно независимые решения этой системы, то подпространство $\mathbf{L}_m$ может быть задано также следующей системой уравнений:

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{x})=0,\ (\mathbf{b}_2, \mathbf{x})=0,\ldots,(\mathbf{b}_{n-m}, \mathbf{x})=0, \tag{5}$$

или, в координатах, системой линейных однородных уравнений

$$b_\alpha^1x^1+b_\alpha^2x^2+\ldots+b_\alpha^nx^n=0,\quad \alpha=1,\ldots,n-m. \tag{6}$$

Плоскость π_m размерности m (m-плоскость) в пространстве E_n определяется принадлежащей ей точкой M_0 и m-мерным направляющим подпространством $\mathbf{L}_m$ и состоит из точек M, удовлетворяющих соотношению

$$\overrightarrow{M_0M}\in\mathbf{L}_m\Leftrightarrow\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\in\mathbf{L}_m, \tag{7}$$

где $\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}$ и $\mathbf{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$ — радиус-векторы точек M и M_0. Если (x^i) — координаты точки M, а (x_0^i) — координаты точки M_0, то из (6) следует, что m-плоскость π_m задается системой линейных уравнений

$$b_\alpha^1x^1+b_\alpha^2x^2+\ldots+b_\alpha^nx^n=b_\alpha,\quad \alpha=1,\ldots,n-m,$$

где $b_\alpha=b_\alpha^1x_0^1+b_\alpha^2x_0^2+\ldots+b_\alpha^nx_0^n$.

Задача. Убедиться, что всякая m-плоскость является евклидовым пространством размерности m.

Плоскость π_{n-1} размерности $n-1$ в пространстве E_n называется *гиперплоскостью*. Всякий вектор из одномерного ортогонального дополнения направляющего подпространства гиперплоскости π_{n-1} называется *нормальным вектором* этой гиперплоскости. Из изложенного выше следует, что гиперплоскость с нормальным вектором $\mathbf{a}$, проходящая через точку M_0 с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$, имеет уравнение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0 \Leftrightarrow a^1x^1+a^2x^2+\ldots+a^nx^n+a=0, \tag{8}$$

где $a=-(a^1x_0^1+a^2x_0^2+\ldots+a^nx_0^n)$. Имеет место не зависящая от размерности пространства формула расстояния от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до гиперплоскости (8)

$$\mathrm{dist}(M_1,\pi)=\frac{|(\mathbf{a},\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)|}{|\mathbf{a}|}, \tag{9}$$

которая в координатах принимает вид (см., например, [13], с. 61)

$$\mathrm{dist}(M_1,\pi)=\frac{|a^1x_1^1+a^2x_1^2+\ldots+a^nx_1^n+a|}{(a^1)^2+(a^2)^2+\ldots+(a^n)^2}.$$

Гиперплоскость (8) выделяет в пространстве E_n два *замкнутых полупространства*, определяемых соответственно неравенствами

$$(\mathbf{a}, \mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\leq 0 \text{ и } (\mathbf{a}, \mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\geq 0. \qquad (10)$$

Гиперплоскость (8) входит в каждое из полупространств (10) и ограничивает его; если ее удалить из полупространства, получится открытое полупространство, состоящее из точек, лежащих (строго) по одну сторону от гиперплоскости.

Плоскость l размерности один называется *прямой*. Направляющее подпространство $\mathbf{L}_1$ прямой l задается любым ненулевым вектором $\mathbf{a}\in\mathbf{L}_1$, называемым направляющим вектором прямой l. Условие (7) в случае прямой принимает вид

$$\overrightarrow{M_0M} \,||\, \mathbf{a}\Leftrightarrow\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=t\mathbf{a},$$

поэтому прямая в E_n с направляющим вектором $\mathbf{a}$, проходящая через точку M_0, определяется параметрическим уравнением

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{a},\ t\in\mathbf{R}. \qquad (11)$$

В частности, уравнение прямой, проходящей через две точки A и B, имеет вид

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_A+t\overrightarrow{AB},\quad t\in\mathbf{R}. \qquad (12)$$

Подмножество $[A,B]$ прямой (12), состоящее из точек, для которых $t\in[0;1]$, называется (замкнутым) *отрезком* с концами A и B или отрезком, соединяющим точки A и B.

В координатах уравнение (11) принимает вид

$$x^i=x_0^i+ta^i,\quad i=1,\ldots,n,\quad t\in\mathbf{R}.$$

ШАР И КУБ

Естественные объекты, имеющиеся в евклидовом пространстве любой размерности, это шар и куб.

Шаром, точнее, замкнутым шаром, в E_n радиуса $a>0$ с центром в точке M_0 называется подмножество

$$B[M_0,a]=\{M\in E_n \mid d(M_0,M)\leq a\},$$

состоящее из точек, удаленных от точки M_0 на расстояние не большее a. Множество точек, удаленных от точки M_0 на расстояние, равное a, называется *сферой*. Сфера является границей шара.

Если в E_n выбрана прямоугольная система координат с началом в точке M_0, то шар и сфера задаются соответственно следующими неравенством и уравнением:

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2\le a^2 \ \text{ и } \ (x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n+1})^2=a^2.$$

Сфера с уравнением

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2=1$$

в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ называется *стандартной n-мерной сферой* (*n-сферой*) и обозначается $\mathbf{S}^n$.

Куб размерности n (*n-куб*) с длиной ребра, равной a, представляет собой подмножество в евклидовом пространстве E_n, определяемое в некоторой прямоугольной системе координат системой неравенств

$$0\le x\ \le a,\quad i=1,\ldots,n.$$

Все n-мерные кубы подобны, поэтому для изучения их геометрии можно рассматривать куб C_n, заданный системой неравенств

$$0\le x\ \le 1,\quad i=1,\ldots,n. \qquad (13)$$

Куб, заданный системой неравенств

$$-1\le x^i\le 1,\quad i=1,\ldots,n \qquad (14)$$

в пространстве $\mathbf{R}^n$, называется *стандартным n-мерным кубом*. Он симметричен относительно начала координат и координатных плоскостей всех размерностей.

Если из n неравенств в системе неравенств (13), определяющих куб C_n, выбрать некоторые m, а остальные положить равными нулю или единице, то получится m-куб, лежащий в соответствующей координатной плоскости или в плоскости, параллельной координатной. Этот m-куб является m-гранью (гранью размерности m) куба C_n.

Задача. Показать, что число m-граней у n-куба равно $2^{n-m}C_n^m$.

Граница n-куба состоит из $(n-1)$-граней, число которых равно $2n$.

Из определения n-куба (13) следует, что он как множество является объединением $(n-1)$-кубов

$$C_{n-1}(t)=\{\mathbf{x}\in C_n \mid x^n=t,\ \ t\in[0;1]\},$$

являющихся пересечениями куба C_n с плоскостями $x^n=t$, то есть C_n заметается в пространстве E_n при движении $(n-1)$-куба $C_{n-1}(t)$ в направлении n-ой координатной оси при изменении n-ой координаты от 0 до 1. При этом $(n-2)$-грани куба $C_{n-1}(t)$ в процессе движения заметают $(n-1)$-кубы, образующие вместе с $(n-1)$-

кубами $C_{n-1}(0)$ и $C_{n-1}(1)$ границу куба C_n. На рис. 1 этот факт проиллюстрирован для случая n=3, а на рис. 2 изображена конструкция 4-куба.

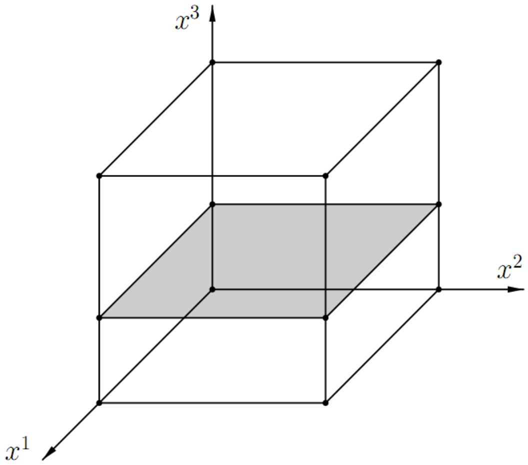

Рис. 1.

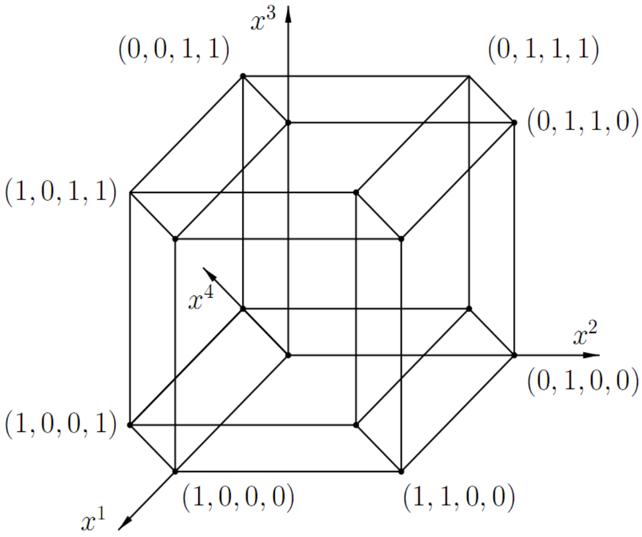

Рис. 2.

Замечание. Надо иметь в виду, что все рисунки многомерных объектов (как и трехмерных) представляют собой проекции некоторых многомерных конфигураций на двумерную плоскость.

Задача. Сдвигая 4-куб, заданный в координатной плоскости x^5=0 пространства E_5, в направлении пятой координатной оси, получить изображение 5-куба, аналогичное рис. 2 (удобнее построить изображение параллелепипеда, у которого ребра, направленные параллельно пятой координатной оси, имеют длину, большую длин ребер 4-куба).

Уравнениями (каждым по отдельности)

$$x^1=0,\ x^1=1,\ x^2=0,\ x^2=1,\ x^3=0,\ x^3=1,\ x^4=0,\ x^4=1,$$

задаются восемь 3-плоскостей, пересечения которых с 4-кубом дают восемь 3-кубов, являющихся 3-гранями 4-куба. В совокупности эти 3-грани образуют границу 4-куба в E_4 или его поверхность. У каждых двух 3-граней, за исключение противоположных, лежащих в параллельных 3-плоскостях, имеется общая 2-грань (квадрат), по которой эти 3-грани соединяются. Например, грани $x^1=0$ и $x^4=1$ соединены по общей 2-грани, определяемой системой уравнений $x^1=0$, $x^4=1$. Если в 3-кубе, расположенном в 4-мерном пространстве, зафиксировано положение 2-грани (квадрата), то 3-куб может вращаться вокруг этой грани, как квадрат в трехмерном пространстве может вращаться вокруг неподвижного ребра. Ребро, перпендикулярное зафиксированной грани, может вращаться вокруг своей вершины в 2-плоскости, перпендикулярной этой грани.

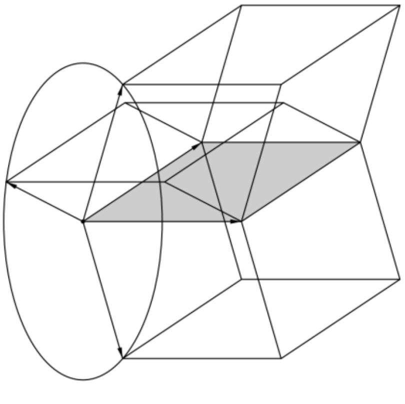

Рис. 3.

Смежные 3-грани границы 4-куба можно вращать вокруг их общей 2-грани. Если границу 4-куба представить как набор из восьми 3-кубов, соединенных по некоторым граням, то, разъединяя часть соединенных граней (разрезая границу по некоторым 2-граням) и вращая кубы, составляющие границу таким образом, чтобы все они оказались в одной трехмерной плоскости, можно получить развертку границы 4-куба, представляющую собой многогранник в трехмерном пространстве.

Совокупность 3-граней и 2-граней можно рассматривать как граф, вершинами которого являются 3-грани, а ребрами — 2-грани, соединяющие соответствующие 3-грани. Тогда для получения развертки границы 4-куба, надо удалить такой набор ребер указанного графа, чтобы остался связный граф без циклов. Одна из разверток определяется, например, графом

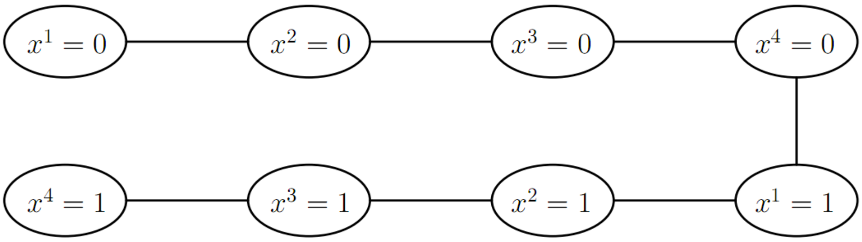

Рис. 4.

Графу, изображенному на рис. 5,

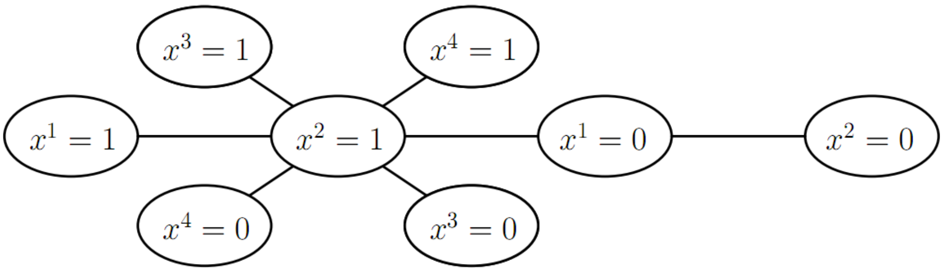

Рис. 5.

соответствует развертка, приведенная на рис. 6.

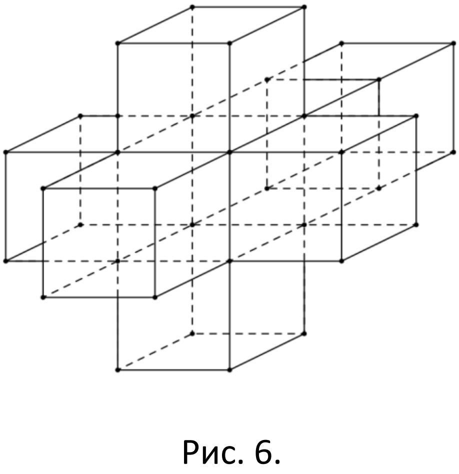

Рис. 6.

Если смотреть на трехмерный куб со стороны одной из его 2-граней, представляя его как тело в реальном (физическом) пространстве, то ребра, перпендикулярные этой 2-грани, будут восприниматься как лежащие на пересекающихся прямых. В проективной интерпретации точка пересечения этих прямых является несобственной точкой пространства E_3, рассматриваемого как часть проективного пространства P_3 (см., например, [12]). При этом трехмерный куб будет изображаться следующим рисунком, на котором две 2-грани куба изображаются квадратами, а четыре трапециями:

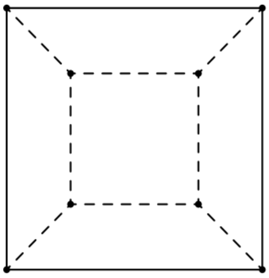

Рис. 7.

Аналогичным образом можно изобразить 4-куб, располагая его ребра, параллельные 4-ой координатной оси, на пересекающихся прямых. При этом его 3-грани будут изображаются двумя кубами и шестью усеченными пирамидами (см. рис. 8):

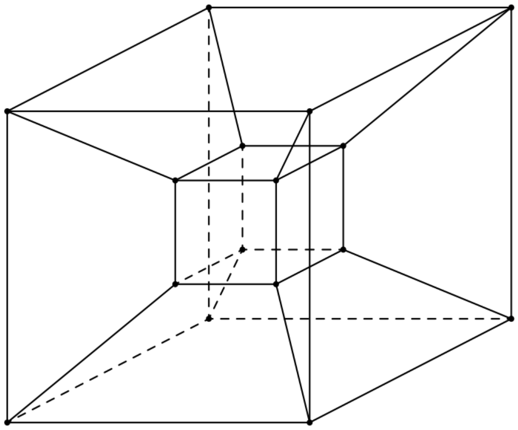

Рис. 8.

Рис. 8 позволяет наглядным образом продемонстрировать, как получается развертка 4-куба, представленная на рис. 6: у всех граничных 3-кубов, изображенных усеченными пирамидами, кроме одного, надо оставить не разрезанными только 2-грани, общие с большим (наружным) 3-кубом, а у одного оставить не разрезанной еще и общую 2-грань с малым (внутренним) 3-кубом, а потом «выдавить» (повернуть вокруг 2-граней наружного куба) все пирамиды и внутренний куб «наружу».

Вращая (n−1)-грани n-куба вокруг (n−2)-граней, можно аналогично четырехмерному случаю получить развертку границы n-куба как некоторый многогранник в (n−1)-мерном пространстве.

Задача. Описать развертки границы 5-куба и n-куба аналогичные развертке, соответствующей рис. 6.

По определению, сферой $S(M_0,a)$ радиуса $a>0$ с центром в точке M_0 с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ в пространстве E_n называется подмножество в E_n, состоящее из точек, удаленных от точки M_0 на расстояние a. Таким образом, сфера $S(M_0,a)$ определяется уравнением

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2=a^2. \tag{15}$$

Задача. Все вершины стандартного n-куба (14) находятся на одинаковом расстоянии от начала координат — центра n-куба, поэтому вокруг этого n-куба можно описать сферу. Вычислить ее радиус.

Задача. Использовав развертку, вычислить кратчайшее расстояние вдоль границы n-куба между двумя противоположными вершинами.

Решение этой задачи, а также некоторые другие задачи из области многомерной геометрии, можно найти в материалах математической олимпиады [6].

МНОГОГРАННИКИ В E_n

Куб является примером многогранника в пространстве E_n, более того, куб является правильным многогранником. Для аккуратного рассмотрения других многогранников в E_n необходимо сформулировать ряд определений.

Открытым шаром в E_n радиуса $a>0$ с центром в точке M_0 называется подмножество

$$B(M_0,a)=\{M\in E_n \mid d(M_0,M)<a\},$$

состоящее из точек, удаленных от точки M_0 на расстояние строго меньшее a. Сфера $S(M_0,a)$ является границей шара $B(M_0,a)$.

Пусть S — подмножество в E_n. Точка $M \in S$ называется *внутренней точкой* подмножества S, если в S содержится некоторый открытый шар с центром в точке M. Множество всех внутренних точек подмножества S называется *внутренностью* подмножества S.

Подмножество $S \subset E_n$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором открытом шаре $B(M_0,a)$ (можно при этом всегда указать такой шар с центром в начале координат).

Подмножество $S \subset E_n$ называется *выпуклым*, если вместе с каждыми двумя своими точками A, $B \in S$ оно содержит весь отрезок $[A, B]$. Наименьшее выпуклое множество, содержащее данное подмножество S, называется его *выпуклой оболочкой*.

Выпуклым многогранником называется ограниченное подмножество $S \subset E_n$ с непустой внутренностью, являющееся пересечением

$$S = \bigcap_{\alpha=1}^{N} R_\alpha \qquad (16)$$

конечного числа замкнутых полупространств R_α.

При рассмотрении выпуклого многогранника естественно предполагать, что среди полупространств R_α нет лишних.

Задача. Показать, что выпуклый многогранник является выпуклым множеством.

Пересечение $S \cap H_\alpha$ выпуклого многогранника S с гиперплоскостью H_α, ограничивающей полупространство R_α из определения (16) этого многогранника, называется *гранью* или ($n-1$)-*гранью* многогранника S.

Задача. Гиперплоскость H_α является евклидовым пространством размерности $n-1$. Убедиться, что грань $S \cap H_\alpha$ является выпуклым многогранником в пространстве H_α.

Поскольку грань многогранника S является выпуклым многогранником, то можно рассматривать ее грани. Грани ($n-1$)-граней многогранника S называются его ($n-2$)-гранями. По индукции определяются k-грани многогранника S как грани его ($k+1$)-граней. 0-грани многогранника S называются его вершинами, а 1-грани — его ребрами.

Задача. Показать, что выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой множества своих вершин.

Далее под многогранником S всегда имеется в виду выпуклый многогранник.

Флагом n-мерного многогранника называется набор его k-граней по одной для каждого k=0, 1,…,n−1:

$$\boldsymbol{F}=\{F_k,\ k=0,\ 1,\ldots,\ n-1\}=\{F_0,\ F_1,\ \ldots,\ F_{n-1}\},$$

такой что $F_k \subset F_{k+1}$, то есть набор, состоящий из некоторой вершины F_0, ребра F_1, содержащего вершину F_0, 2-грани F_2, содержащей ребро F_1, и так далее.

Движением пространства E_n называется взаимно однозначное отображение φ: $E_n \ni M \to M' \in E_n$, которое устанавливает соответствие между точками, имеющими одинаковые координаты по отношению к двум ортонормированным реперам $(O,\{\mathbf{e}_i\})$ и $(O',\{\mathbf{e}'_i\})$, то есть если $\overrightarrow{OM}=x^1\mathbf{e}_1+x^2\mathbf{e}_2+\ldots+x^n\mathbf{e}_n$, то $\overrightarrow{O'M'}=x^1\mathbf{e}'_1+x^2\mathbf{e}'_2+\ldots+x^n\mathbf{e}'_n$.

Правильным многогранником в E_n называется выпуклый многогранник P, такой что для любых двух флагов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}'$ существует движение φ пространства E_n, при котором многогранник P отображается на себя и флаг $\boldsymbol{F}$ отображается на флаг $\boldsymbol{F}'$. Все такие движения называются *симметриями* ([8, с. 210]) правильного многогранника, они образуют группу, обозначаемую $G(P)$.

Задача. Показать, что для двух заданных флагов симметрия правильного многогранника P, при которой один флаг переходит в другой, единственна и, следовательно, число элементов в группе $G(P)$ равно числу флагов.

Задача. Показать, что число элементов в группе куба $G(C_n)$ равно $2^n n!$.

Задача. Используя результат предыдущей задачи, показать, что группа стандартного куба состоит из всех отображений, порождаемых перестановками координатных осей и симметриями относительно координатных гиперплоскостей.

Пусть A_α, α=1,…,m, — вершины правильного многогранника P и $\mathbf{r}_\alpha$ — радиус-вектор вершины A_α по отношению к некоторому ортонормированному реперу. Точка C с радиус-вектором $\mathbf{r}_C=(1/m)(\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_1+\ldots+\mathbf{r}_m)$ остается неподвижной при всех преобразованиях группы $G(P)$. Она называется центром многогранника P.

СИМПЛЕКС

Выпуклая оболочка множества точек $\{A_1,A_2,\ \ldots,\ A_{n+1}\}$ в E_n, находящихся в общем положении (то есть таких, что векторы $\{\overrightarrow{A_1A_i}\}$, i=2,…,n+1, линейно независимы), называется *симплексом* (*n-симплексом*) с вершинами A_1, A_2,…, A_{n+1}. Если все расстояния между вершинами симплекса равны, симплекс называется правильным. Правильный n-симплекс, вершина A_i которого расположена на i-ой координатной оси (n+1)-мерного пространства E_{n+1} и имеет радиус-вектор $\mathbf{e}_i$, задается следующей системой, состоящей из уравнения и неравенств:

$$x^1+x^2+\ldots+x^{n+1}=1,\ \ x \geq 0. \tag{17}$$

Этот симплекс расположен в гиперплоскости пространства E_{n+1}. Симплекс, заданный в $\mathbf{R}^{n+1}$ системой (17), называется *стандартным n-симплексом*.

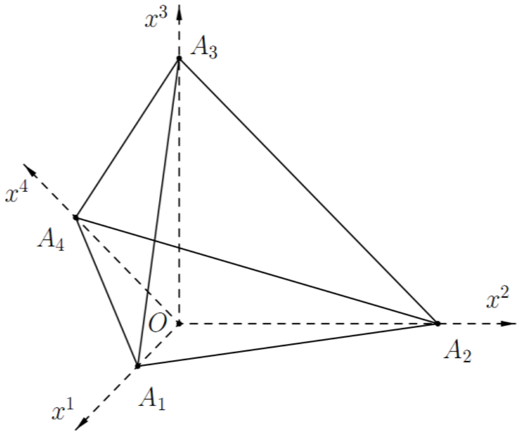

Рис. 9.

Грани n-симплекса являются (n−1)-симплексами, а k-грани — k-симплексами. В случае стандартного n-симплекса грань, противоположная вершине A_i, задается уравнением x^i=0.

Грани n-симплекса, имеющие уравнения x^i=0 и x =0, можно вращать вокруг их общей (n−2)-грани, задаваемой системой уравнений x^i=0, x =0. Использовав это, можно построить развертки границы симплекса. Графу на рис. 10

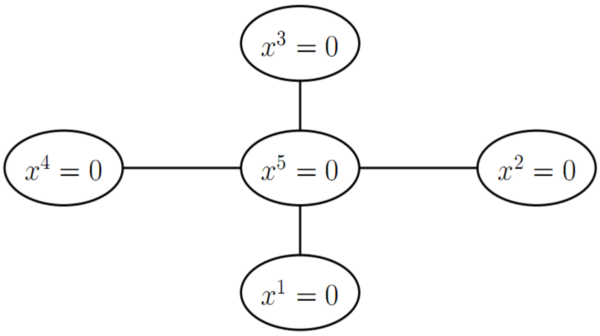

Рис. 10.

соответствует развертка границы 4-симплекса, изображенная на рис. 11.

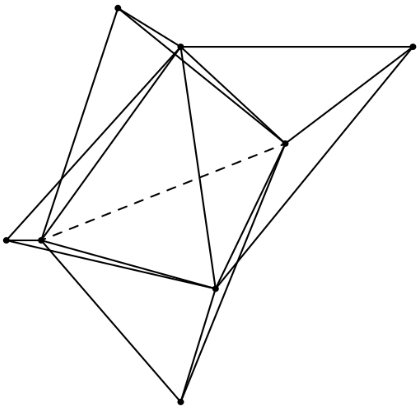

Рис. 11.

Эта развертка аналогична развертке тетраэдра, изображенной на рис. 12.

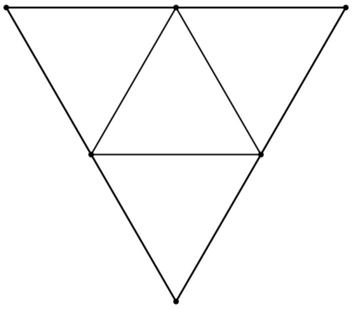

Рис. 12.

Задача. Описать другие возможные развертки для границы 4-симплекса. Привести пример развертки границы n-симплекса.

Задача. Подсчитать число элементов в группе симметрий правильного n-симплекса. Показать, что для стандартного симплекса эта группа состоит из всех отображений, порождаемых перестановками координатных осей пространства $\mathbf{R}^{n+1}$.

ДВОЙСТВЕННЫЙ ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОГРАННИК

Пусть P — правильный многогранник в E_n с вершинами A_α, $\alpha=1,\dots,m$, которые заданы радиус-векторами $\mathbf{a}_\alpha$ относительно ортонормированного репера с началом в центре многогранника. Двойственным к P называется многогранник P^*, представляющий собой следующее пересечение полупространств:

$$P^* = \bigcap_{\alpha=1}^{m} R^*_\alpha,\ \ R^*_\alpha=\{M(\mathbf{r})\ |\ (\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{r})\leq 1\}. \tag{18}$$

Из определения (18) следует, что вершине A_α многогранника P соответствует грань ($n-1$)-грань) многогранника P^*, лежащая в гиперплоскости $H^*_\alpha=\{M(\mathbf{r})\ |\ (\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{r})=1\}$, нормальным вектором которой является радиус-вектор $\mathbf{a}_\alpha$ вершины A_α. Ребру $[A_\alpha A_в]$ многогранника P при этом будет соответствовать ($n-2$)-грань многогранника P^*, лежащая в пересечении $H^*_\alpha \cap H^*_\beta$. В общем случае k-грани F многогранника P, определенной k+1 вершинами, радиус-векторы которых $\mathbf{a}_{\alpha_1}$, $\mathbf{a}_{\alpha_2}$,…, $\mathbf{a}_{\alpha_k}$ линейно независимы, будет соответствовать ($n-k-1$)-грань F^* многогранника P^*, лежащая в пересечении $\bigcap_{u=1}^{k+1} H^*_{\alpha_u}$.

Задача. Показать, что отношение двойственности правильных многогранников — взаимное, то есть $(P^*)^*=P$.

Задача. Показать, что группы $G(P)$ и $G(P^*)$ симметрий многогранников P и P^* совпадают.

Задача. Показать, что выпуклая оболочка центров граней правильного многогранника P является правильным многогранником, подобным многограннику P^*.

КОКУБ

Правильный многогранник, двойственный кубу, называется *кокубом*. Кокубом трехмерного пространства является октаэдр. Кокуб пространства $\mathbf{R}^n$, двойственный стандартному кубу (14), называется *стандартным n-мерным кокубом*. Стандартный кокуб задается неравенством

$$|x^1|+|x^2|+\ldots+|x^n|\leq 1.$$

Действительно, вершины стандартного куба имеют координаты

$$(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1), \tag{19}$$

следовательно, гиперплоскости, содержащие грани двойственного многогранника, имеют уравнения

$$\pm x^1 \pm x^2 \pm \ldots \pm x^{n+1}=1, \tag{20}$$

и вершинами кокуба оказываются центры граней куба, то есть точки

$$(\pm 1, 0, 0, \ldots, 0),\ \ (0, \pm 1, 0, \ldots, \pm 1,), \ldots,\ \ (0, 0, \ldots, 0, \pm 1) \tag{21}$$

на координатных осях с координатами ±1.

Координатные гиперплоскости пространства E_n делят E_n на 2^n координатных n-гранных углов. В каждом таком координатном угле находится одна из вершин (19) стандартного куба, обозначим эту вершину A, и координаты всякой точки, лежащей внутри этого n-гранного угла, имеют такие же знаки, что и соответствующие координаты вершины A. Например, координатный угол, определяемый системой неравенств $x^i \geq 0$, $i=1,\ldots,n$, содержит вершину куба (1, 1, …, 1). Гиперплоскость (20), соответствующая точке A, отрезает от координатного угла симплекс, одной из вершин которого является начало координат, а оставшимися вершинами — вершины (21) кокуба, координаты которых совпадают с соответствующими координатами точки A. Этот симплекс составляет $(1/2^n)$-ю часть кокуба. Грань симплекса, противоположная началу координат, является и гранью кокуба. Таким образом, все $(n-1)$-грани кокуба являются правильными $(n-1)$-симплексами. Следовательно, и k-грани кокуба при любом k являются k-симплексами. В частности, грань кокуба, лежащая в координатном угле, определяемом системой неравенств $x^i \geq 0$, $i=1,\ldots,n$, является $(n-1)$-симплексом, определяемом системой $x^1+x^2+\ldots+x^n=1$, $x^i \geq 0$, $i=1,\ldots,n$.

4-симплекс с вершинами O, A_1, A_2, A_3, A_4 на рисунке 9 представляет собой 1/16 часть стандартного 4-кокуба, а 3-симплекс с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4 (тетраэдр) является его гранью. Для того чтобы изобразить весь кокуб, на рис. 9 нужно добавить еще 15 граней – 3-симплексов, высекаемых 3-плоскостями (20) (при n=4) в координатных четырехгранных углах.

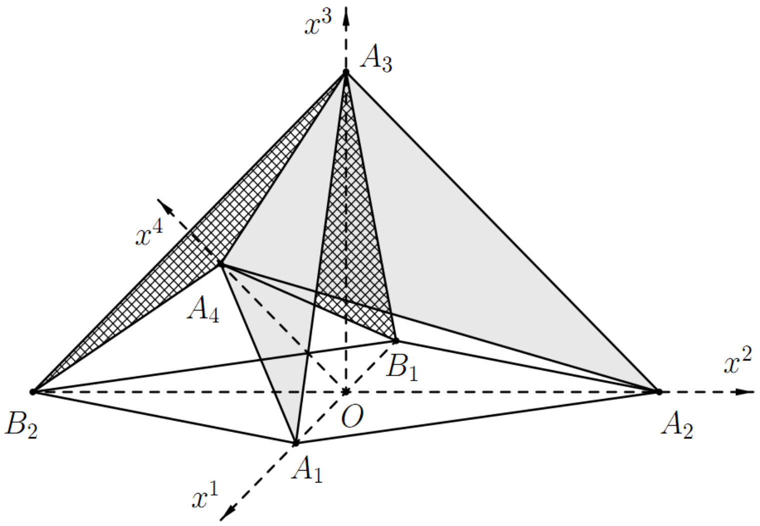

Рис. 13.

На рис. 13 изображена часть стандартного 4-кокуба, расположенная в 1/4 части пространства, определенной системой неравенств $x^3 \geq 0$, $x^4 \geq 0$, ограниченная четырьмя гранями – 3-симплексами $A_1A_2A_3A_4$, $B_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2A_3A_4$, $A_1B_2A_3A_4$, где точки B_1 и B_2 – вершины кокуба с координатами (−1, 1, 1, 1) и (1, −1, 1, 1). Указанные 3-симплексы соединены (последовательно) общими 2-гранями $A_2A_3A_4$, $B_1A_3A_4$, $B_2A_3A_4$ и $A_1A_3A_4$, выделенными на рисунке. Полностью, со всеми гранями, 4-кокуб изображен на рис. 14.

Линиями большей толщины на рис. 14 изображен октаэдр, расположенный в 3-плоскости $Ox^1x^2x^3$. Кокуб представляет собой пару пирамид с вершинами в точках (0, 0, 0, 1) и (0, 0, 0, −1), надстроенных над этим октаэдром.

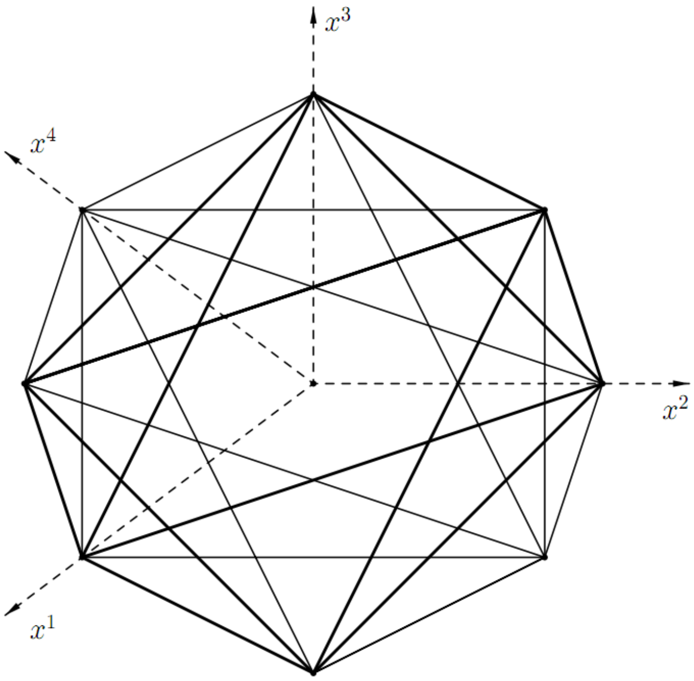

Рис. 14.

Задачи

1) Вычислить число k-граней n-кокуба.

2) Вычислить число элементов в группе кокуба, подсчитав число его флагов.

3) Построить граф, образованный 3-гранями и 2-гранями 4-кокуба, и графы, соответствующие разверткам границы 4-кокуба, аналогично графам на рис. 4 и 5.

СЕЧЕНИЯ КУБА ГИПЕРПЛОСКОСТЯМИ, ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ДИАГОНАЛИ КУБА

Прямая, соединяющая противоположные вершины куба, называется его диагональю. Одной из диагоналей куба (13) является прямая OE, проходящая через начало координат $O(0, 0, \ldots, 0)$ и противоположную точку $E(1, 1, \ldots, 1)$. Направляющий вектор диагонали $\mathbf{d} = \overrightarrow{OE}$ имеет координаты {1, 1, …, 1}, поэтому гиперплоскость, ортогональная диагонали, имеет уравнение

$$x^1+x^2+\ldots+x^n=a. \qquad (22)$$

При $a<0$ и $a>n$ куб (13) и гиперплоскость (22) не имеют общих точек, при $a=0$ и $a=n$ их общими точками являются вершины O и E соответственно. Если же $0<a<n$, то пересечение куба (13) и гиперплоскости (22) является выпуклым $(n-1)$-мерным многогранником, лежащим в гиперплоскости (22). Обозначим его $P(a)$. Какой вид может иметь многогранник $P(a)$ при различных значениях $a\in(0,n)$? Куб лежит в координатном угле, где $x^i\geq 0$, $i=1,\ldots,n$, а пересечение гиперплоскости (22) с этим углом является правильным симплексом. Поэтому многогранник $P(a)$ представляет собой правильный симплекс, от которого гранями куба (возможно) отрезаны некоторые части. При $a<1$ симплекс не может иметь общих точек с гранями $x^i=1$, $i=1,\ldots,n$, поэтому при $a<1$ многогранник $P(a)$ – симплекс. При $a=1$ вершины куба, лежащие на осях, совпадут с вершинами симплекса, и поэтому $P(1)$ – это стандартный симплекс. При $1<a<2$ грани $x^i=1$, $i=1,\ldots,n$, отрежут от симплекса углы, поэтому в этом случае $P(a)$ – симплекс с отрезанными углами.

Задача. Показать, что сечение 4-куба, заданного системой неравенств $0\leq x^i\leq 1$, $i=1, 2, 3, 4$, 3-плоскостью $x^1+x^2+x^3+x^4=2$ представляет собой октаэдр (см. рис. 15).

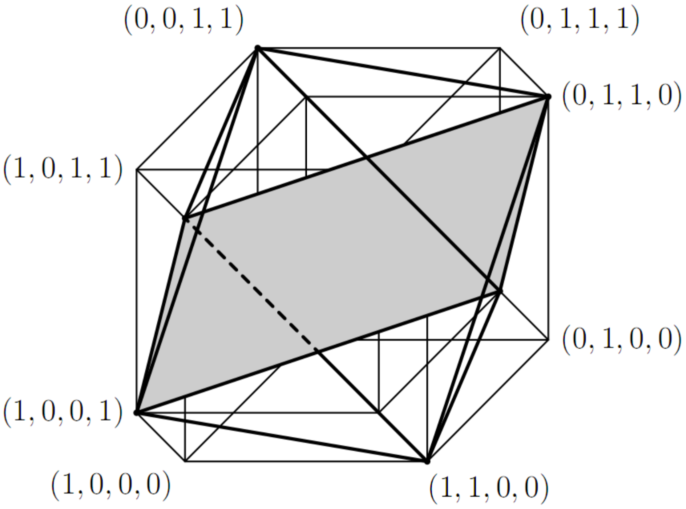

Рис. 15.

Задача. Описать сечения *n*-куба (13) гиперплоскостью $x^1+x^2+\ldots+x^n=m$, где *m* – целое число. Показать, что все такие гиперплоскости делят диагональ *n*-куба на *n* равных частей.

ЗВЕЗДА И СИМВОЛ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОГРАННИКА

Поворотом правильного многогранника *P* с помощью некоторого элемента группы *G*(*P*), оставляющим на месте его вершину *A*, можно совместить любые два ребра *AB* и *AC*, выходящие из этой вершины. Отсюда следует, что ребра, выходящие из вершины *A*, образуют равные углы с отрезком *AO*, соединяющим вершину *A* с центром многогранника, а все вершины многогранника, имеющие общее ребро с вершиной *A*, лежат в гиперплоскости π с уравнением $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_B,\mathbf{r}_A)=0$, где центр *O* является началом координат, а *B* – некоторая вершина, соединенная с *A* ребром.

Задача. Доказать, что пересечение $st_A(P)=\pi\cap P$ – правильный $(n-1)$-мерный многогранник.

Многогранник $st_A(P)$ называется *звездой* многогранника *P* с вершиной *A*. Очевидно, что все звезды многогранника *P* эквивалентны и могут быть переведены преобразованием из группы *G*(*P*) одна в другую.

Символ $(a_1, a_2,\ldots,a_{n-1})$ правильного многогранника *P* ([3], с. 496) представляет собой набор целых чисел, где a_1 – число сторон в двумерной грани многогранника

P, а набор $(a_2,\ldots,a_{n-1})$ – символ звезды $st_A(P)$. Правильный многогранник определяется своим символом с точностью до подобия.

Задачи.

1) Выписать символы трехмерных правильных многогранников.

2) Показать, что символы n-мерных симплекса, куба и кокуба имеют соответственно вид (3, …, 3), (4, 3, …, 3) и (3, …, 3, 4).

При n>4 других правильных многогранников, кроме симплекса, куба и кокуба, нет ([3], с. 498), но в размерности 4 имеются еще три многогранника с символами (3, 4, 3), (3, 3, 5) и (5, 3, 3). Ниже будет рассмотрен многогранник (3, 4, 3). У этого многогранника 24 вершины и 24 грани, одно из его названий – 24-ячейка. Двойственный к (3, 4, 3) многогранник совпадает с (3, 4, 3) с точностью до подобия. У многогранника (3, 3, 5) 600 граней и 120 вершин, а у двойственного многогранника (5, 3, 3) – 120 граней и 600 вершин ([5], с. 574).

24-ЯЧЕЙКА (МНОГОГРАННИК (3, 4, 3))

Стандартный правильный многогранник с символом (3, 4, 3) представляет собой выпуклую оболочку объединения стандартного куба $-1\leq x^i\leq 1$, i=1, 2, 3, 4, и кокуба, заданного неравенством $|x^1|+|x^2|+|x^3|+|x^4|\leq 2$, или выпуклую оболочку 24 точек: 16-ти вершин куба (±1, ±1, ±1, ±1) и 8-ми вершин кокуба (±2, 0, 0, 0), (0, ±2, 0, 0), (0, 0, ±2, 0), (0, 0, 0, ±2). Покажем, что многогранник P, представляющий собой выпуклую оболочку вышеуказанных 24 точек, является правильным и имеет символ (3, 4, 3).

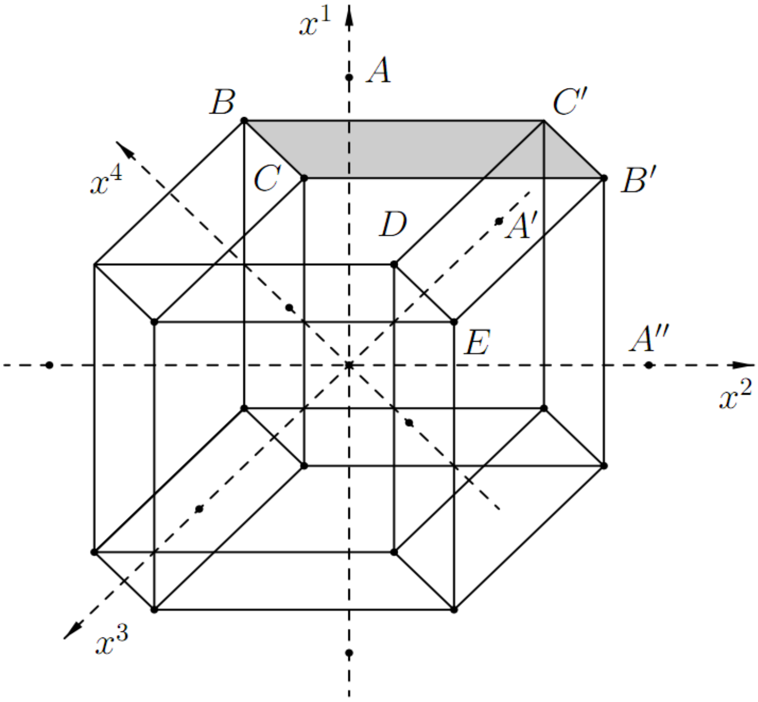

Рис. 16.

Рассмотрим вершину кокуба $A(2, 0, 0, 0)$. Ближайшими к ней вершинами многогранника P являются вершины грани $x^1=1$ куба, которая, таким образом, является звездой вершины A. Грань, содержащая вершину A (3-грань), содержит кроме нее еще некоторую 2-грань звезды, например, 2-грань $BCB'C'$ ($x^1=1$, $x^3=-1$), выделенную на рис. 16. Легко проверить, что 3-плоскость, содержащая точку A и квадрат $BCB'C'$, содержит и вершину кокуба A' с координатами $(0, 0, -2, 0)$ и что многогранник $ABCB'C'A'$ – октаэдр. Поэтому флаги при вершине A (и при всех вершинах кокуба) – это октаэдры с их гранями. Преобразования из общей для куба и кокуба группы переводят флаги при вершинах кокуба снова в флаги при вершинах кокуба. Рассмотрим теперь ребро AD, где D – вершина куба с координатами $(1, 1, 1, 1)$, и 3-плоскость π, проходящую через середину $(3/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ ребра AD перпендикулярно AD. Эта плоскость π имеет уравнение

$$-(x^1-3/2)+(x^2-1/2)+(x^3-1/2)+(x^4-1/2) \Leftrightarrow -x^1+x^2+x^3+x^4=0. \tag{23}$$

Легко проверить, что многогранник P при симметрии σ относительно π переходит в себя. А именно, симметричными являются следующие 8 пар его вершин, в которых одна вершина является вершиной кокуба:

$$(2, 0, 0, 0) \leftrightarrow (1, 1, 1, 1), \qquad (-2, 0, 0, 0) \leftrightarrow (-1, -1, -1, -1),$$

$$(0, 2, 0, 0) \leftrightarrow (1, 1, -1, -1), \quad (0, -2, 0, 0) \leftrightarrow (-1, -1, 1, 1),$$
$$(0, 0, 2, 0) \leftrightarrow (1, -1, 1, -1), \quad (0, 0, -2, 0) \leftrightarrow (-1, 1, -1, 1),$$
$$(0, 0, 0, 2) \leftrightarrow (1, -1, -1, 1), \quad (0, 0, 0, -2) \leftrightarrow (-1, 1, 1, -1),$$

симметричны две вершины куба $(1, -1, -1, -1) \leftrightarrow (-1, 1, 1, 1)$, а остальные 6 вершин куба $(1, 1, 1, -1)$, $(1, 1, -1, 1)$, $(1, -1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1, -1)$, $(-1, -1, 1, -1)$ и $(-1, -1, -1, 1)$ лежат в плоскости π. Таким образом, группа преобразований, порождаемая преобразованиями из группы куба и преобразованием σ, транзитивно действует на множестве флагов многогранника P, и многогранник P имеет символ (3, 4, 3).

Задача. Показать, что числа ребер, 2-граней и 3-граней многогранника (3, 4, 3) равны 96, 96 и 24 соответственно.

Число элементов в группе правильного многогранника можно вычислить как произведение числа его вершин на число элементов в группе звезды. Отсюда следует, что группа многогранника (3, 4, 3) состоит из 24×48=1152 элементов.

Задача. Вычислить это же число 1152 как число флагов многогранника (3, 4, 3).

Задача. Две 3-грани $ABCB'C'A'$ и $ADEB'C'A''$ на рис. 16 имеют общую 2-грань $AB'C'$. Показать, что векторы с началом в центре многогранника и концами в центрах 3-граней $ABCB'C'A'$ и $ADEB'C'A''$ имеют координаты $\{1,0,-1,0\}$ и $\{1,1,0,0\}$ соответственно, что позволяет вычислить двугранный угол при 2-грани $AB'C'$, равный 120°.

В размерности три можно рассмотреть многогранник с 14 вершинами $(\pm1, \pm1, \pm1)$, $(\pm2, 0, 0)$, $(0, \pm2, 0)$, $(0, 0, \pm2)$, определенный аналогично (3, 4, 3) как выпуклая оболочка куба $-1 \le x^i \le 1$, $i=1, 2, 3$, и октаэдра $|x^1|+|x^2|+|x^3| \le 2$. Этот многогранник называется *ромбододекаэдром* ([5, с. 578]).

Задача. Проверить, что ромбододекаэдр имеет 12 граней, каждая из которых является ромбом с острым углом arccos(1/3), в вершинах куба сходится по три грани, а в вершинах октаэдра сходится по четыре грани ромбододекаэдра, ребра куба являются диагоналями граней ромбододекаэдра (см. Рис. 17, на котором изображена часть граней ромбододекаэдра).

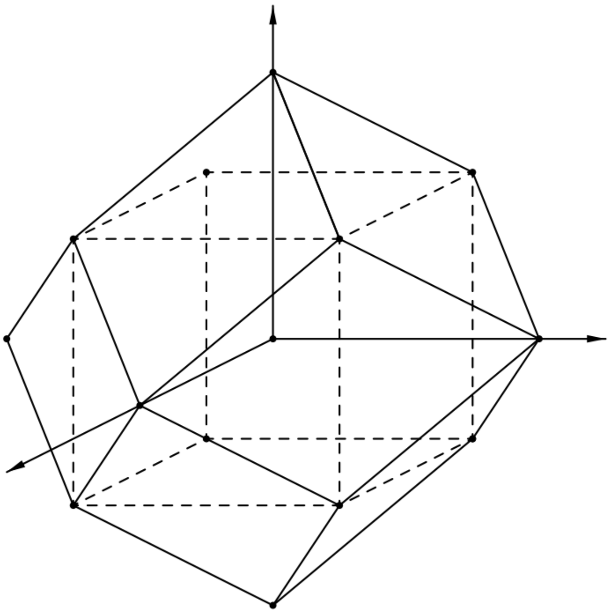

Рис. 17.

Задача. Проверить, что сечения стандартной 24-ячейки координатными 3-плоскостями являются ромбододекаэдрами.

Задача. Вычислив координаты пересечения ребер стандартной 24-ячейки с 3-плоскостью (23), показать, что сечение 24-ячейки 3-плоскостью (23) является ромбододекаэдром.

Задача. Показать, что выпуклая оболочка 24 точек с координатами

$$(\pm1, \pm1, 0, 0), \quad (\pm1, 0, \pm1, 0), \quad (\pm1, 0, 0, \pm1),$$
$$(0, \pm1, \pm1, 0), \quad (0, \pm1, 0, \pm1), \quad (0, 0, \pm1, \pm1)$$

является 24-ячейкой. *Указание:* рассмотреть систему координат, направляющими векторами координатных осей которой являются векторы

$$\mathbf{e}_1=\{1, 1, 0, 0\}, \ \mathbf{e}_2=\{1, -1, 0, 0\}, \ \mathbf{e}_3=\{0, 0, 1, 1\}, \ \mathbf{e}_4=\{0, 0, 1, -1\}.$$

СФЕРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Сфера $S(M_0, a)$ радиуса a с центром в точке M_0 в E_n задается уравнением (15). В прямоугольной системе координат уравнение (15) принимает вид

$$(x^1-x_0^1)^2+(x^2-x_0^2)^2+\ldots+(x^n-x_0^n)^2=a^2.$$

Подмножество $\mathbf{S}^n$ в $\mathbf{R}^{n+1}$, заданное уравнением

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n+1})^2=1,$$

называется *стандартной n-мерной сферой*.

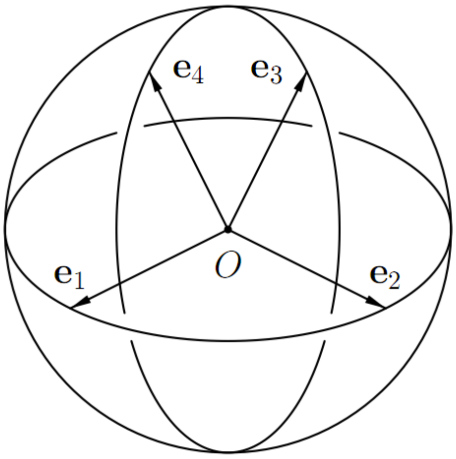

Рис. 18.

На рис. 18 изображена трехмерная сфера. Плоскости Ox^1x^2 и Ox^3x^4 имеют только одну общую точку — начало координат, большие окружности сферы, лежащие в этих плоскостях, не пересекаются.

Задача. Векторное пространство $\mathbf{R}^{2n}$ можно снабдить структурой комплексного пространства $\mathbf{C}^n$ (например, полагая $z^i=x^i+\sqrt{-1}\,x^{i+n}$). Использовав то, что n-мерное комплексное векторное пространство является объединением одномерных векторных пространств, имеющих нуль единственным общим вектором, показать, что нечетномерная сфера $\mathbf{S}^{2n-1}$ (в частности, $\mathbf{S}^3$) является объединением непересекающихся окружностей.

В уравнении (15) размерность сферы не присутствует, поэтому многие формулы для n-мерной сферы не отличаются от аналогичных формул для двумерной сферы или окружности. Например, уравнение касательной (гипер)-плоскости к сфере (15) в ее точке $M_1(\mathbf{r}_1)$ имеет вид

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)=0\ \Leftrightarrow\ (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)=a^2.$$

Задача. Вычислить радиусы сфер, описанных около рассмотренных выше стандартных правильных многогранников.

Задача. Показать, что для всякого правильного многогранника существует сфера с центром в центре многогранника, касающаяся всех его граней в центре этих граней. Эта сфера называется сферой, вписанной в правильный многогранник. Использовав формулу (9), вычислить радиусы сфер, вписанных в рассмотренные выше стандартные правильные многогранники.

СФЕРА S^3 КАК ДВА ПОЛНОТОРИЯ С ОБЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

Топологически, то есть с точностью до взаимно однозначного и взаимно непрерывного соответствия, n-мерная сфера $\mathbf{S}^n$ эквивалентна границе (n+1)-мерного куба и границе (n+1)-мерного симплекса (и вообще границе любого выпуклого многогранника в E_{n+1}). Взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие называется гомеоморфизмом. Гомеоморфизм между кубом или симплексом и описанной сферой можно осуществить, устанавливая соответствие между точками, лежащими на одном луче, выходящем из общего центра. На рис. 19 такие гомеоморфизмы изображены для случая размерности n+1=2.

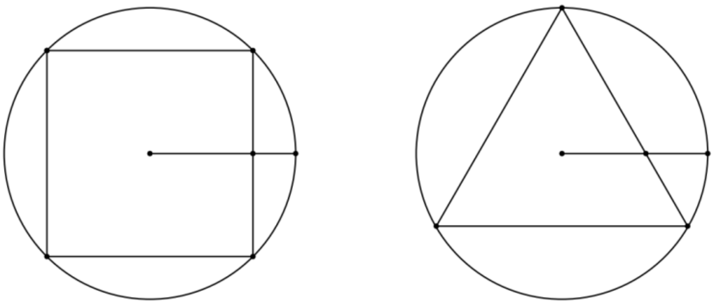

Рис. 19.

Стандартную трехмерную сферу $\mathbf{S}^3$, заданную уравнением

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2=1 \tag{24}$$

в пространстве $\mathbf{R}^4$, можно представить как объединение двух подмножеств

$$P=\{(x^1, x^2, x^3, x^4)\in\mathbf{S}^3 \mid (x^1)^2+(x^2)^2\leq 1/2\}, \tag{25}$$

$$Q=\{(x^1, x^2, x^3, x^4)\in\mathbf{S}^3 \mid (x^3)^2+(x^4)^2\leq 1/2\}, \tag{26}$$

имеющих общую границу, определяемую системой уравнений

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1/2, \quad (x^3)^2+(x^4)^2=1/2. \tag{27}$$

Системой уравнений (27) в $\mathbf{R}^4$ определяется двумерная поверхность T, называемая тором. Если пространство $\mathbf{R}^4$ рассматривать как произведение двух двумерных пространств $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$, то тор T представляет собой произведение $\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1$ двух окружностей. Топологически тор T эквивалентен поверхности бублика, то есть поверхности в трехмерном пространстве, получаемой вращением окружности вокруг прямой, лежащей с окружностью в одной плоскости и не пересекающей окружность. Тор T расположен на трехмерной сфере $\mathbf{S}^3$ и делит сферу $\mathbf{S}^3$ на два подмножества *P* и *Q*, каждое из которых топологически представляет собой полноторие (заполненный тор).

Понятно, что в любом евклидовом пространстве E_4 в произвольной прямоугольной системе координат сфера единичного радиуса с центром в начале координат будет иметь уравнение (24) и будет представляться в виде объединения двух полноторий (25) и (26). Таким образом, представить трехмерную сферу в виде объединения двух полноторий с общей границей можно многими способами. Поскольку трехмерная сфера гомеоморфна границе любого четырехмерного куба, то указанные полнотория (точнее, их образы при гомеоморфизме) можно отыскать на границе куба.

Задача. Убедиться, что объединения (последовательно идущих) трехмерных граней 4-куба на рисунке 2, определяемых соответственно уравнениями x^1=1, x^2=1, x^1=0, x^2=0 и x^4=0, x^3=0, x^4=1, x^3=1, представляют собой пару полноторий с общей границей. На развертке, изображенной на рисунке 6, четыре выстроенных в линию куба принадлежат одному полноторию, а четыре, окружающие центральный куб x^2=1, принадлежат второму.

Задача. Найти пару взаимно дополнительных полноторий на рис. 8.

Другие темы из области многомерной геометрии, а также задачи, можно найти в приведенной ниже литературе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П.* Геометрия I. М.: Просвещение, 1974. 352 с.
2. *Базылев В.Т., Дуничев К.И.* Геометрия II. М.: Просвещение, 1975. 367.
3. *Берже М.* Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984. 560 с.
4. *Берже М.* Геометрия. Т. 2. М.: Мир, 1984. 368 с.
5. *Кокстер Г.С.М.* Введение в геометрию. М.: Наука, 1966. 648 с.
6. Открытая Поволжская математическая олимпиада студентов, приуроченная ко дню рождения Н.И. Лобачевского. URL: https://lobachevolymp.kpfu.ru
7. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1967. 384 с.
8. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.

9. *Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В.* Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 310 с.

10. Сборник задач по геометрии. Под ред. В.Т. Базылева. М.: Просвещение, 1980. 240 с.

11. *Шурыгин В.В., Шурыгин В.В. (мл.)* Аналитическая геометрия I. Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть I. Аналитическая геометрия плоскости. Казань: КФУ, 2018. 154 с.

12. *Шурыгин В.В., Шурыгин В.В. (мл.)* Комбинирование методов евклидовой, аффинной и проективной геометрий при решении геометрических задач // Электронные библиотеки. 2021. Т. 24. № 3. С. 563-580.

13. *Шурыгин В.В., Шурыгин В.В. (мл.)* Аналитическая геометрия III. Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть III. Многомерные пространства. Гиперповерхности второго порядка. Казань: КФУ, 2014. 160 с.

14. Энциклопедия элементарной математики. Кн. V — Геометрия. М.: Физматгиз, 1966. 624 с.

MULTIDIMENSIONAL GEOMETRY IN ELECTIVE COURSES FOR SECONDARY SCHOOL AND FIRST YEAR UNIVERSITY STUDENTS

V. V. Shurygin[1][0000-0002-4325-214X], V. V. Shurygin, jr.[2][0000-0001-9771-1447]

Kazan Federal University, Kazan

[1]Vadim.Shurygin@kpfu.ru, [2]1Vadim.Shurygin@kpfu.ru

Abstract

In the paper, we develop some approaches to teaching multidimensional geometry in elective courses the aim of which is to help students to develop multidimensional geometric intuition. Special attention is given to the use of transformation groups in the study of geometry of regular polyhedrons.

***Keywords**: Four-dimensional cube, four-dimensional geometry, four-dimensional regular polyhedron, multidimensional geometry, three-dimensional sphere, 24-cell.*

REFERENCES

1. *Bazylev V.T., Dunichev K.I., Ivanitskaya V.P.* Geometriya I. M.: Prosveshchenie, 1974. 352 p.
2. *Bazylev V.T., Dunichev K.I.* Geometriya II. M.: Prosveshchenie, 1975. 367 p.
3. *Berger M.* Geometry. V. 1. Springer, 1987. 432 p. (Russian translation)
4. *Berger M.* Geometry. V. 2. Springer, 1987. 406 p. (Russian translation)
5. *Coxeter H.S.M.* Introduction to Geometry. NY.: John Wiley & Sons, 1989. 496 p. (Russian translation)
6. Lobachevskii Mathematical Competition for University Students. URL: https://lobachevolymp.kpfu.ru
7. *Proskuryakov I.V.* Sbornik zadach po lineynoy algebre. M.: Nauka, 1967. 384 p.
8. *Rosenfeld B.A.* Mnogomernye prostranstva. M.: Nauka, 1966. 648 p.
9. *Sadovnichii V.A., Grigoryan A.A., Konyagin S.V.* Zadachi studencheskikh matematicheskikh olimpiad. M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1987. 310 p.
10. Sbornik zadach po geometrii. Pod red. V.T. Bazyleva. M.: Prosveshchenie, 1980. 240 p.
11. *Shurygin V.V., Shurygin V.V., jr.* Analiticheskaya geometriya I. Uchebnoe posobie k kursu «Analiticheskaya geometriya». Chast’ I. Analiticheskaya geometriya ploskosti. Kazan: KFU, 2018. 154 p.
12. *Shurygin V.V., Shurygin V.V., jr.* Combining Methods of Euclidean, Affine, and Projective Geometries in Solving Geometric Problems // Russian Digital Libraries Journal. 2021. V. 24. № 3. P. 563-580.
13. *Shurygin V.V., Shurygin V.V., jr.* Analiticheskaya geometriya III. Uchebnoe posobie k kursu «Analiticheskaya geometriya». Chast’ III. Mnogomernye prostranstva. Giperpoverkhnosti vtorogo poryadka. Kazan: KFU, 2014. 160 p.
14. Entsiklopediya elementarnoy matematiki. Kn. V — Geometriya. M.: Fizmatgiz, 1966. 624 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ШУРЫГИН Вадим Васильевич – профессор, кафедра геометрии, Казанский федеральный университет, Казань.

Vadim Vasilievich SHURYGIN – Professor of the Chair of Geometry, Kazan Federal University, Kazan.

email: Vadim.Shurygin@kpfu.ru

URL: https://kpfu.ru/Vadim.Shurygin

ORCID: 0000-0002-4325-214X.

ШУРЫГИН Вадим Вадимович – доцент, кафедра геометрии, Казанский федеральный университет, Казань.

Vadim Vadimovich SHURYGIN –Associate Professor of the Chair of Geometry, Kazan Federal University, Kazan.

email: 1Vadim.Shurygin@kpfu.ru

URL: https://kpfu.ru/1Vadim.Shurygin

ORCID: 0000-0001-9771-1447.

Материал поступил в редакцию 11 мая 2024 года