

ЗАВИСИМОСТЬ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКОЙ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ

М. Н. Кирсанов¹ [0000-0002-8588-3871], А. И. Муницын² [0009-0002-8118-0957]

^{1, 2}Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Россия

¹c216@ya.ru, ²munitsyn@rambler.ru

Аннотация

Приведен алгоритм вывода аналитической зависимости наименьшей собственной частоты колебаний плоской статически определимой регулярной фермы от числа панелей. Используются метод Донкерлея и его упрощенный вариант. Показано, что упрощенный вариант дает не только более простую, но и более точную формулу. Предполагается, что масса фермы сконцентрирована в ее узлах, а число степеней свободы конструкции совпадает с числом узлов. Для аналитических преобразований и решения рекуррентных уравнений применена система компьютерной математики Maple. Жесткость фермы рассчитана по формуле Максвелла–Мора.

Ключевые слова: Ферма, собственные колебания, частота колебаний, метод Донкерлея, аналитическое решение, Maple, формула Максвелла–Кремоны, регулярная конструкция, рекуррентные уравнения, спектр, изолинии.

ВВЕДЕНИЕ

Расчет собственных частот колебаний конструкций на практике производится численно в специализированных пакетах, в основе которых лежит метод конечных элементов [1–3]. Для регулярных статически определимых ферм возможно применение аналитического метода Донкерлея. Этот метод дает нижнюю границу первой (основной) частоты [4]. В [5] приведен упрощенный вариант метода Донкерлея, дающий более точное аналитическое решение.

Одно из достоинств аналитических решений – независимость точности решения от порядка регулярности конструкции. Известно, что при большом числе стержней в ферме в процессе численного расчета, включающего в себя обращение

ние матриц систем линейных уравнений большого порядка, возникает неизбежная ошибка, связанная с накоплением погрешности округления. Аналитический метод свободен от этого недостатка, и это особенно проявляется в регулярных конструкциях.

Впервые проблемами регулярных ферм занялись Р. Хатчинсон и Н. Флек [6, 7]. Формулы для частот колебаний плоских регулярных ферм получены в [8, 9], для пространственной фермы – в [10].

СХЕМА ФЕРМЫ

На рисунке 1 приведена схема плоской фермы с треугольной решеткой с четным числом панелей $2n$, каждая из которых имеет длину $2a$ и высоту h .

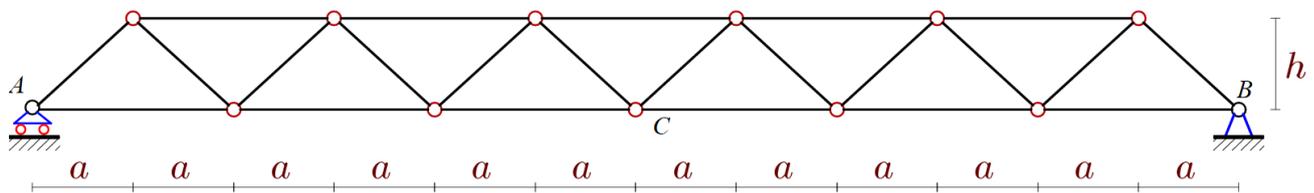


Рис. 1. Ферма, $n=3$

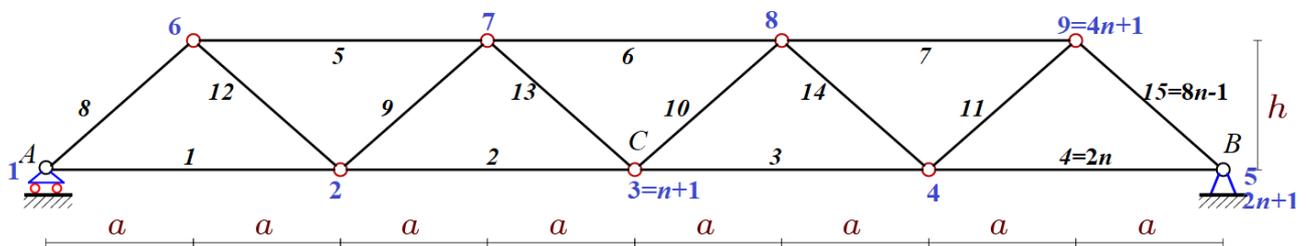


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы, $n=2$

Ферма состоит из $m = 8n + 2$ стержней общей длиной $4nc + 2(4n - 1)a$. В число стержней входят и три опорные стержня, моделирующие подвижную левую и подвижную правую опоры.

Для расчета усилий в стержнях, необходимых для вычисления жесткости фермы по формуле Максвелла–Мора, зададим математическую модель конструкции в декартовой системе координат. Координаты узлов на языке системы компьютерной математики Maple с учетом того, что начало координат находится в опоре А (рис. 2), имеют вид

```
> for i to 2*n+1 do x[i]:=2*a*i-2*a: y[i]:=0: end:
> for i to 2*n do x[i+2*n+1]:=2*a*i-a: y[i+2*n+1]:=h: end:
```

Структуру решетки фермы зададим специальными списками концевых вершин всех стержней конструкции:

```
for i to 2*n do N[i]:=[i,i+1]; end:
for i to 2*n-1 do N[i+2*n]:=[2*n+i+1,i+2*n+2]; end:
for i to 2*n do N[i+4*n-1]:=[i,i+2*n+1];
N[i+6*n-1]:=[1+i,i+2*n+1]; end:
```

Матрица G системы линейных уравнений равновесия узлов формируется из направляющих косинусов усилий в стержнях фермы в цикле по числу m стержней в ферме:

```
for i to m do Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
> Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
> L[i]:=sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2):
> for j to 2 do
> k:=2*N[i][2]-2+j:
> if k<=m then G[jj,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
> k:=2*N[i][1]-2+j:
> if k<=m then G[jj,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi;
> od;
> od:
```

Усилия s в стержнях, входящие в формулу Максвелла–Мора для расчета жесткости фермы, вычислим из решения системы уравнений методом обратной матрицы: $G1:=1/G$: $S:=G1.B$:

МЕТОД ДОНКЕРЛЕЯ

Инерционные свойства фермы будем моделировать одинаковыми массами m , сосредоточенными в узлах. Таким образом, если не учитывать горизонтальные смещения масс, число степеней свободы равно $K = 4n + 1$. Для расчета частот колебаний систему уравнений движения массивных узлов фермы запишем в матричной форме

$$\mu I_K \ddot{Y} + D_K Y = 0, \quad (1)$$

где Y – вектор смещений узлов фермы по оси y , \ddot{Y} – вектор ускорений, I_K – еди-

ничная матрица, D_K – матрица жесткости. Для гармонических колебаний с частотой ω справедлива замена $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$. Если умножить слева уравнения (1) на матрицу податливости B_K , то задачу можно свести к проблеме поиска собственных значений матрицы B_K : $B_K Y = \lambda Y$. Матрица имеет собственные числа $\lambda = 1 / (\omega^2 \mu)$. Обратной матрицей жесткости является матрица податливости $B_K = 1 / D_K$, значения которой вычисляются по формуле Максвелла–Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^m S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad (2)$$

где $S_{\alpha}^{(i)}$ – усилие в стержне с номером $\alpha = 1, \dots, m$ от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу i . В число стержней включены и три опорные стержня. Вертикальные опорные стержни взяты длиной h , длина горизонтального опорного стержня (компонента правой опоры B) равна a . Жесткость EF всех стержней в ферме взята одинаковой. Для вычисления собственных чисел матрицы и спектра частот в общем случае используются численные методы.

Формула Донкерлея дает нижнюю границу ω_D основной частоты ω_1 :

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (3)$$

где ω_p – парциальная частота груза в узле p , вычисленная из уравнения его движения:

$$\mu \ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (4)$$

Коэффициент жесткости D_p есть величина, обратная податливости, которая вычисляется по формуле Максвелла–Мора

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{\alpha=1}^m (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF). \quad (5)$$

Из (3) и (5) следует формула для нижней границы первой собственной частоты по Донкерлею

$$\omega_D^{-2} = \mu \sum_{p=1}^K \delta_p = \mu \Delta_n. \quad (6)$$

Расчет сумм $\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^m (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF)$ для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей дает

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= (26a^3 + 10c^3 + 15h^3) / (4h^2 EF), \\ \Delta_2 &= 3(252a^3 + 28c^3 + 17h^3) / (8h^2 EF), \\ \Delta_3 &= 13(1298a^3 + 66c^3 + 25h^3) / (36h^2 EF), \\ \Delta_4 &= 17(1384a^3 + 40c^3 + 11h^3) / (16h^2 EF), \\ \Delta_5 &= 7(10222a^3 + 190c^3 + 41h^3) / (20h^2 EF), \dots\end{aligned}$$

В общем случае

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF),$$

где с помощью операторов `rgf_findrecur` и `rsolve` системы Maple вычисляются общие члены последовательностей коэффициентов

$$\begin{aligned}C_1 &= (16n^2 - 1)(32n^2 + 7) / 90, \\ C_2 &= (16n^2 - 1) / 6, \\ C_3 &= (4n + 1)(8n + 1) / (12n).\end{aligned}$$

Формула для нахождения нижней оценки первой частоты по методу Донкерлея получена в виде

$$\omega_D^{-2} = \mu(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF). \quad (7)$$

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД ДОНКЕРЛЕЯ

Недостатком метода Донкерлея является необходимость суммирования в формуле (3). Этот недостаток проявляется только при поиске аналитического решения – не все конечные суммы символьных выражений находятся легко, и не все результаты суммирования имеют простой вид, удобный для практических расчетов. В [5] предложено заменить сумму ее приближенным значением, вычисленным по формуле площади треугольника [11]:

$$\omega_D^{-2} = \mu \sum_{p=1}^K \delta_p = \mu \delta_{\max} K / 2 = \mu \Delta_{\max},$$

где δ_{\max} – максимальное значение δ_p . Шарнир, смещение которого под действием

силы, приложенной к нему, максимально для конкретной конструкции выбирается опытным путем. В рассматриваемой ферме положение такого шарнира очевидно. Это шарнир C в нижнем поясе с номером $n+1$. Вычислив величину максимального прогиба от единичной силы для разного числа панелей в ферме, получим последовательность

$$\begin{aligned}\Delta_{\max 1} &= 5(6a^3 + 2c^3 + h^3) / (4h^2 EF), \\ \Delta_{\max 2} &= 9(44a^3 + 4c^3 + h^3) / (4h^2 EF), \\ \Delta_{\max 3} &= 13(146a^3 + 6c^3 + h^3) / (4h^2 EF), \\ \Delta_{\max 4} &= 17(344a^3 + 8c^3 + h^3) / (4h^2 EF), \\ \Delta_{\max 5} &= 21(670a^3 + 10c^3 + h^3) / (4h^2 EF), \dots\end{aligned}$$

Обобщение этого ряда на произвольное число панелей дает формулу

$$\Delta_{\max} = (4n + 1)(2(8n^2 + 1)na^3 + 6nc^3 + 3h^3) / (12h^2 EF).$$

Отсюда формула для первой частоты по упрощенному методу Донкерлея примет вид

$$\omega_* = 2h \sqrt{\frac{3EF}{\mu(4n + 1)(2(8n^2 + 1)na^3 + 6nc^3 + 3h^3)}}. \quad (8)$$

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

Аналитическое решение (7) по методу Донкерлея и решение (8) сравним с численным решением для первой частоты колебаний фермы с K степенями свободы. Для примера приняты длина панели $a = 3\text{м}$, площадь поперечного сечения стержней $F = 4\text{см}^2$, модуль упругости материала стержней $E = 2,1 \cdot 10^5\text{МПа}$, массы в узлах $\mu = 100\text{кг}$. На рисунке 4 приведены кривые зависимости от числа панелей частот ω_D и ω_* , полученных аналитически, и частоты ω_1 , найденной численно. При расчете численного решения отыскивалось максимальное собственное число матрицы B_K . Для этого использовалась та же программа системы Maple, что и при поиске аналитического решения, но в численной моде с применением встроенных операторов поиска собственных чисел матрицы.

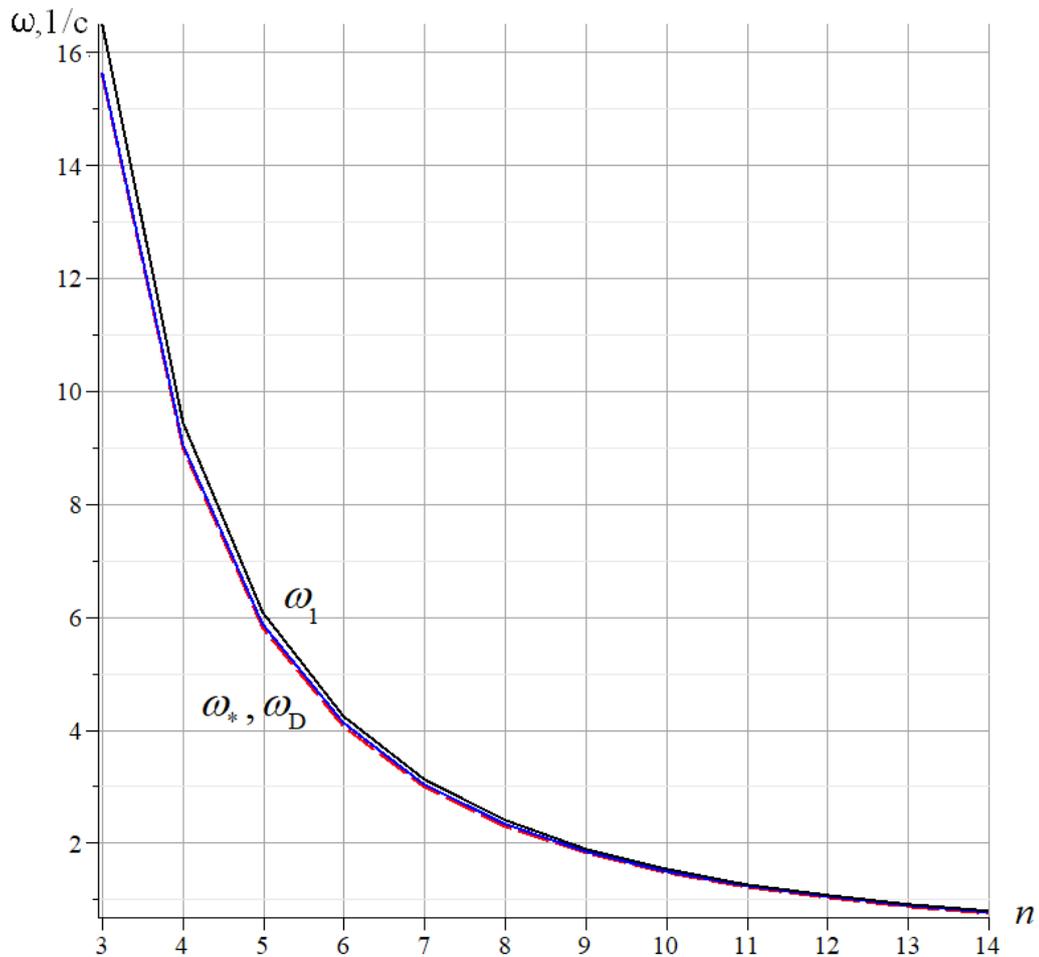


Рис. 3. Зависимость первой частоты собственных колебаний фермы от числа панелей при $h=2$ м.

С увеличением числа панелей собственная частота монотонно уменьшается. Все три метода дают весьма близкие результаты. Уточнить погрешности аналитических методов можно, введя относительные величины

$$\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1, \quad \varepsilon_* = |\omega_1 - \omega_*| / \omega_1.$$

На рисунке 4 показано, что точность упрощенного метода Донкерлея заметно выше, чем у исходного метода. Кроме того, на точность методов влияет и высота фермы. Эта зависимость отражена на рисунке 5, на котором видно, что погрешности методов с увеличением высоты растут.

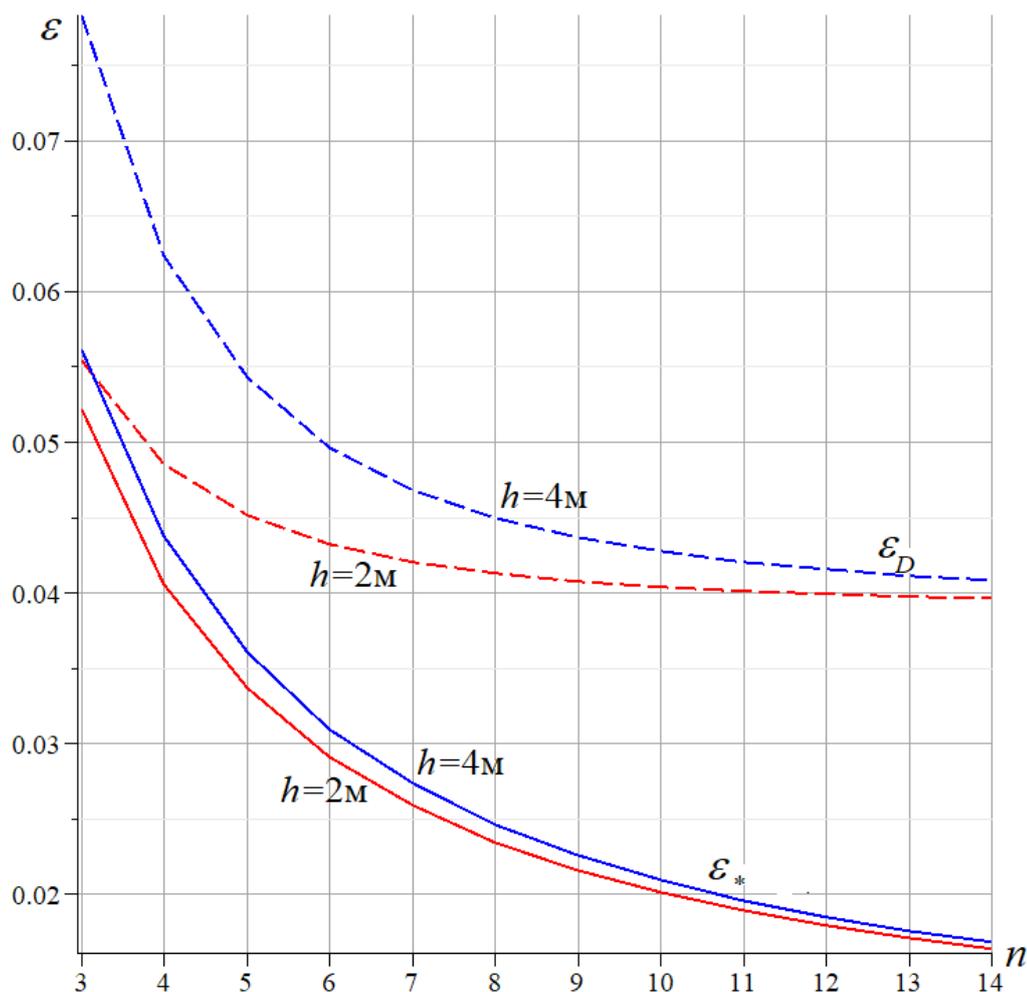


Рис. 4. Зависимости погрешностей аналитических методов от числа панелей

СПЕКТР СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Численный расчет спектров собственных частот колебаний ферм разного порядка регулярности обнаруживает полезные закономерности [8]. Кривые на рисунке б состоят из точек, соответствующих собственным частотам из спектров ферм определенного порядка регулярности. На оси абсцисс j – номер частоты. Расчет выполнен при тех же размерах и массах ферм, что и на рисунке 3. Например, ферме с одной панелью соответствует ломаная $n=1$ из $K = 4 \cdot 1 + 1 = 5$ точек по числу степеней свободы.

Очевидны, по крайней мере, три закономерности, характерные для спектров рассматриваемой фермы. Во-первых, расчеты, выполненные с большой точностью, показывают, что для ферм произвольного порядка высшие частоты кратны и одинаковы. Это характеризуется спектральной константой III. Прямые I и II – это также

спектральные константы, к которым асимптотически стремятся спектральные изолинии. Эти линии соединяют точки частот в спектрах ферм разного порядка с подобными номерами. Например, линия А соединяет частоту 2 из спектра фермы первого порядка, частоту 3 из спектра фермы второго порядка и т. д. В общем случае линия А, асимптотически стремящаяся к спектральной константе I, состоит из частот Ω_k^{k+1} . Нижний индекс в этом обозначении – порядок фермы, верхний – номер частоты в спектре.

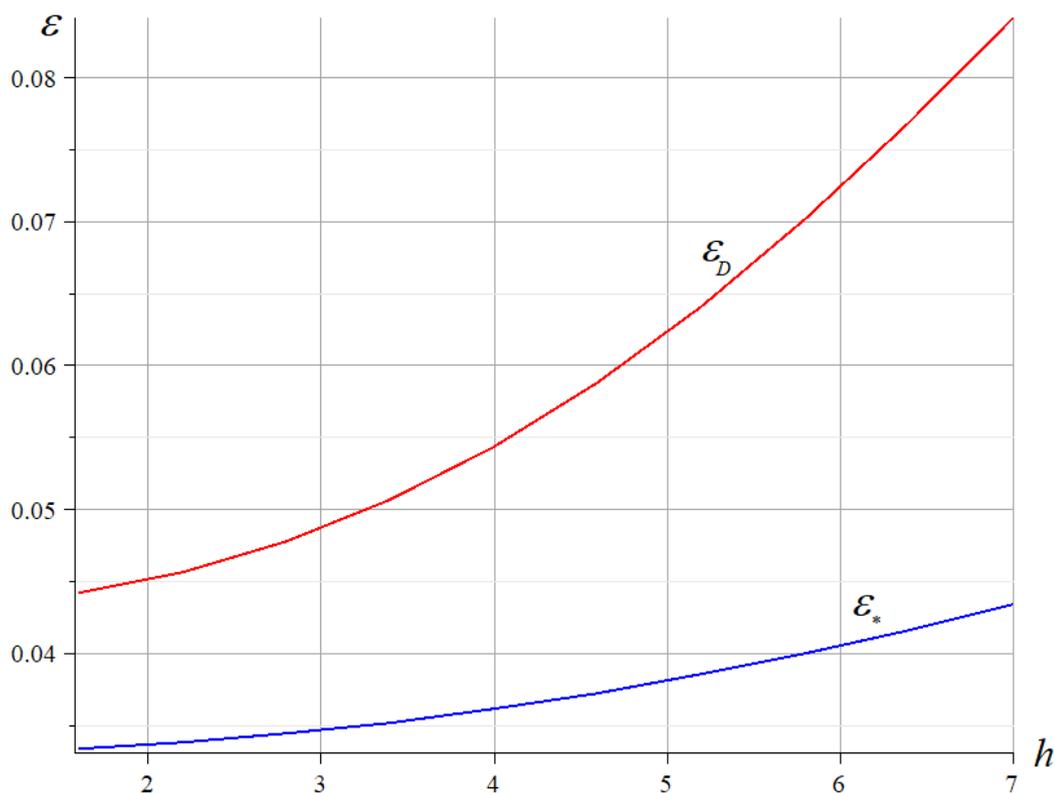


Рис. 5. Зависимости погрешностей аналитических методов от высоты фермы;
 $n=5, a=3$ м.

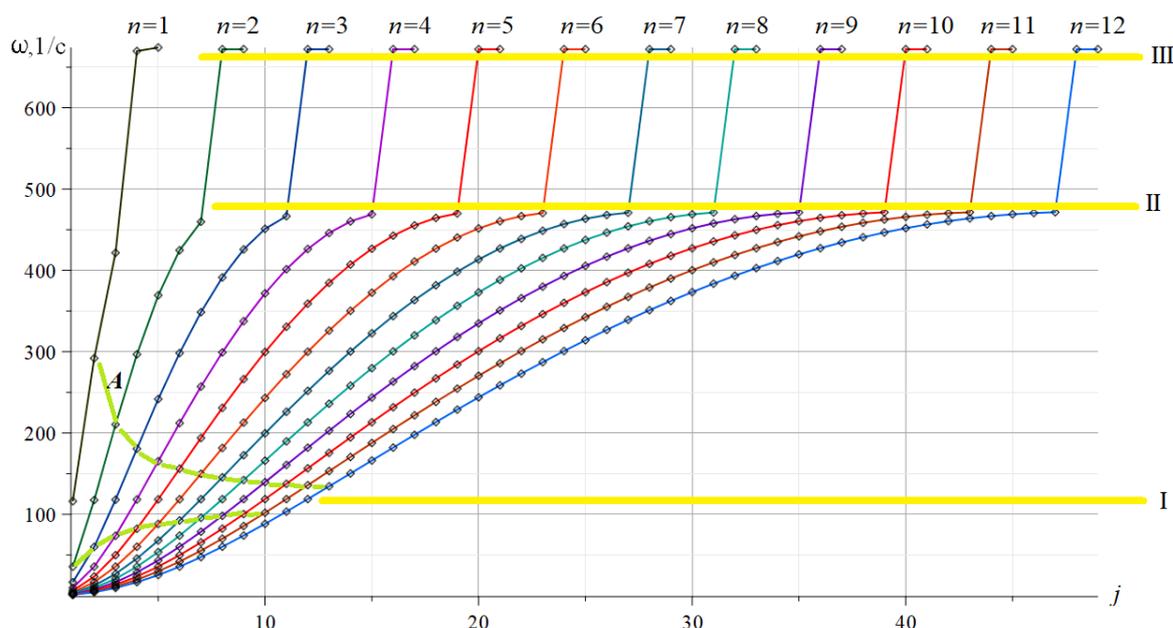


Рис. 6. Объединенный спектр собственных частот семейства регулярных ферм порядка $n=1, 2, \dots, 12$; $a=3$ м, $h=2$ м.

Для практического применения информация о спектральных константах и изолиниях дает возможность получать частоты или их приближенные оценки для ферм большого порядка, для которых требуются объемные вычисления, по результатам расчетов простых ферм небольшого порядка. Безусловно, знание высших частот собственных колебаний конструкций не так остро необходимо, как информация о первой частоте. Однако при решении задач о возможности появления резонанса, например, при установке на ферме устройств, задающих вынужденные колебания на высокой частоте, информация о спектральных константах и изолиниях различного порядка может быть полезна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере стандартной схемы балочной фермы с треугольной решеткой дано сравнение двух аналитических методов расчета первой (основной) собственной частоты колебаний фермы. Аналитические решения получены методом индукции для произвольного числа панелей. Показано, что предлагаемое упрощение метода Донкерлея дает решение не только более простое, но и более точное. Исследовано влияние высоты фермы на погрешность аналитических решений. Найдены некоторые закономерности объединенного спектра собственных частот семейства регулярных ферм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ignatyev A.V., Ignatyev V.A.* On the Efficiency of the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method // *Procedia Engineering*. 2016. V. 150. P. 1760–1765. <https://doi.org/10.1016/J.PROENG.2016.07.167>

2. *Коваленко Г.В., Макеев В.Б., Дементьева В.В.* Исследование частот собственных колебаний ферм на основе метода конечных элементов (МКЭ) // *Молодая мысль: Наука, технологии, инновации*. 2015. С. 44–48.

3. *Цуканова Е.С.* Расчет вынужденных колебаний стержневых систем методом конечных элементов с применением динамического конечного элемента // *Транспортное машиностроение*. 2015. № 2 (46). С. 93.

4. *Kirsanov M.N.* Formulas for the fundamental frequency of natural oscillations of a planar regular truss // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. № 6. С. 551–559. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-551-559>

5. *Kirsanov M.* Formula for natural frequency oscillation truss with an arbitrary number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. V. 109 Article 10918. <https://doi.org/10.4123/CUBS.109.18>

6. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. V. 85, No. 9. P. 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.

7. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. V. 54, No. 4. P. 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>.

8. *Комерзан Е.В., Маслов А.Н.* Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. №2 (37). С. 17–26. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.002>

9. *Щиголь Е.Д.* Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом // *Строительная механика и конструкции*. 2023. №2 (37). С. 46–53. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>

10. *Комерзан Е.В., Маслов А.Н.* Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023.

№2 (37). C. 35–45. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.004>

11. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. V. 108, Article 10801. <https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1>

DEPENDENCE OF THE FIRST FREQUENCY OF NATURAL VIBRATIONS OF A BEAM TRUSS WITH A TRIANGULAR LATTICE ON THE NUMBER OF PANELS

M. N. Kirsanov¹ [0000-0002-8588-3871], A. I. Munitsyn² [0009-0002-8118-0957]

^{1,2}National Research University "MPEI, Moscow, Russia

¹c216@ya.ru, ²munitsyn@rambler.ru

Abstract

An algorithm is given for deriving the analytical dependence of the smallest natural frequency of oscillations of a plane statically determinate regular truss on the number of panels. The Dunkerley method and its simplified version were used. It is shown that the simplified version gives not only a simpler, but also a more accurate formula. It is assumed that the mass of the truss is concentrated in its nodes, and the number of degrees of freedom of the structure coincides with the number of nodes. For analytical transformations and solving recurrent equations, the Maple computer mathematics system was used. The truss stiffness is calculated using the Maxwell–Mohr formula.

Keywords: *Truss, natural oscillations, oscillation frequency, Dunkerley method, analytical solution, Maple, Maxwell–Mohr's formula, regular construction, recurrent equations, spectrum, isolines.*

REFERENCES

1. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A. On the Efficiency of the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method // Procedia Engineering. 2016. V. 150. P. 1760–1765. <https://doi.org/10.1016/J.PROENG.2016.07.167>

2. *Kovalenko G.V., Makeev V.B., Dementieva V.V.* Study of natural vibration frequencies of farms based on the finite element method (FEM) // Young thought: Science, technology, innovation. 2015. P. 44–48.

3. *Tsukanova E.S.* Calculation of forced vibrations of rod systems by the finite element method using a dynamic finite element // Transport engineering. 2015. No. 2 (46). P. 93.

4. *Kirsanov M.N.* Formulas for the fundamental frequency of natural oscillations of a planar regular truss // Structural mechanics of engineering structures and structures. 2023. 19. 6. P. 551–559.

<https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-551-559>

5. *Kirsanov M.* Formula for natural frequency oscillation truss with an arbitrary number of panels. Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. V. 109, Article 10918. <https://doi.org/10.4123/CUBS.109.18>

6. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. V. 85, No. 9. P. 607–617.

<https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.

7. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. V. 54, No. 4. P. 756–782.

<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>

8. *Komerzan E.V., Maslov A.N.* Analytical assessment of the fundamental frequency of natural vibrations of a regular truss // Structural mechanics and structures. 2023. V. 2, No. 37. P. 17–26. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.002>

9. *Shchigol E.D.* Formula for the lower estimate of natural vibrations of a flat regular beam truss with a rectilinear upper chord // Structural mechanics and structures. 2023. V. 2, No. 37. P. 46–53.

<https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>

10. *Komerzan E.V., Maslov A.N.* Estimation of the fundamental vibration frequency of an L-shaped spatial truss // Structural mechanics and structures. 2023. V. 2, No. 37. P. 35–45. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.004>

11. *Kirsanov M.* Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. V. 108, Article 10801. <https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1>

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



КИРСАНОВ Михаил Николаевич Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин., Национальный исследовательский университет «МЭИ». Россия, г. Москва.

Mikhail Nikolaevich KIRSANOV Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics, and Strength of Machines, National Research University "MPEI. Moscow, Russia.

e-mail: c216@ya.ru

ORCID: 0000-0002-8588-3871



МУНИЦЫН Александр Иванович Д-р техн. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин., Национальный исследовательский университет «МЭИ». Россия, г. Москва.

Alexander Ivanovich MUNITSYN Dr. Tech. Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics, and Strength of Machines, National Research University "MPEI". Russia, Moscow.

email: munitsyn@rambler.ru

ORCID: 0009-0002-8118-0957

Материал поступил в редакцию 17 марта 2024 года