

УДК 004.4

СЕМАНТИЧЕСКИЕ СЕРВИСЫ ЦИФРОВОЙ ЭКОСИСТЕМЫ ONTOMATH ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

О. А. Невзорова¹ [0000-0001-8116-9446], Е. К. Липачёв² [0000-0001-7789-2332],
К. С. Николаев³ [0000-0003-3204-238X]

¹⁻³Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 35,
г. Казань, 420008

³Казанское отделение Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук, ул. Лобачевского, 2, г. Казань, 420008

onevzoro@gmail.com, elipachev@gmail.com, konnikolaeff@yandex.ru

Аннотация

Представлен набор семантических сервисов, разработанных с целью поддержки образовательного процесса в области математики. Функционал этих сервисов основан на использовании математических онтологий OntoMath^{Edu} и OntoMath^{PRO}. Онтология профессионального математического знания OntoMath^{PRO} предназначена для классификации и систематизации математических понятий и включает несколько важнейших областей математики. Образовательная математическая онтология OntoMath^{Edu} системно представляет знания по учебному курсу «Планиметрия». Для применения онтологий в образовательных приложениях разработан подход к проектированию пререквизитных отношений в названных онтологиях. Для поддержки математического образования разработаны сервисы семантического поиска по математическим формулам, семантического аннотирования учебных материалов, визуализации подграфов семантической сети онтологии OntoMath^{Edu}, а также параллельный формальный/неформальный корпус математических утверждений и система автоматической генерации тестовых вопросов по математическим дисциплинам.

Приведены примеры успешного применения разработанных программных инструментов. Эти инструменты встроены в цифровую экосистему OntoMath, в рамках которой осуществляется взаимодействие семантических сервисов управления математическим знанием.

Ключевые слова: Цифровая экосистема, экосистема *OntoMath*, предметная онтология, математическая онтология *OntoMath^{PRO}*, образовательная онтология *OntoMath^{Edu}*, пререквизитное отношение, семантический сервис.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время информационно-коммуникационные технологии являются неотъемлемой частью образовательного процесса. Созданы и развиваются информационные платформы, поддерживающие как процесс обучения в общеобразовательной и вузовской системах образования, так и предоставляющие возможности индивидуального дополнительного обучения (см., например, [1–5]). Важное значение при разработке программных инструментов, ориентированных на образовательный процесс, имеет система организации знаний, например, в виде онтологий предметных областей (например, [6]). Формализация образовательных предметных областей в виде онтологий создаёт возможность разработки семантических сервисов, ориентированных на образовательный процесс. Применение семантических технологий в математических образовательных курсах может способствовать более глубокому усвоению математических знаний (см., например, [7–9]).

В статье представлены программные сервисы, разработанные с целью применения в математическом образовании. Эти сервисы включены в цифровую экосистему *OntoMath* и используют онтологии, входящие в её состав.

Образовательные сервисы цифровой экосистемы *OntoMath* поддерживают на текущем этапе системный подход к изучению основных положений математической теории, тем самым внося вклад в достижение цели, связанной с освоением теоретических положений на доказательном уровне. Успешное достижение этой цели возможно на пути учёта индивидуальных особенностей учащихся в восприятии достаточно сложных и абстрактных математических конструкций, а также в понимании и усвоении логики доказательства. Разработка системы пререквизитных отношений между классами математических онтологий обеспечивает возможность использования адаптивных технологий обучения, предлагающих, в частности, построение индивидуальных траекторий обучения.

1. ЦИФРОВАЯ ЭКОСИСТЕМА OntoMath: ОНТОЛОГИИ И СЕРВИСЫ

В рамках проекта построения цифровой математической библиотеки Lobachevskii-DML (<https://lobachevskii-dml.ru/>) с целью управления математическим знанием создана цифровая экосистема OntoMath (см., например, [10–12]). Эта экосистема спроектирована в виде комплекса онтологий и программных инструментов обработки научных документов.

Общая архитектура цифровой экосистемы OntoMath приведена в [13]. Семантическим ядром экосистемы являются онтология профессиональной математики OntoMath^{PRO} и образовательная математическая онтология OntoMath^{Edu} (см. [14, 15]), разработанные на основе методов онтологического инжиниринга. Также для представления метаданных и описания логической структуры математических документов используются внешние онтологии (подробнее см. [16, 17]).

На Рис. 1 приведена архитектура цифровой экосистемы OntoMath, в которой сделан акцент на образовательные приложения: компоненты экосистемы, предназначенные для применения в образовательном процессе, выделены рамками.



Рис. 1. Архитектура цифровой экосистемы OntoMath. Компоненты экосистемы распределены по уровням – компоненты, расположенные уровнем выше, используют функционал нижележащих компонент. Отдельный блок образуют компоненты экосистемы (выделены утолщенной внешней границей), предназначенные для образовательных целей

В цифровую экосистему OntoMath включены программные сервисы, поддерживающие образовательный процесс в области математики. На Рис. 2 приведена общая схема образовательной подсистемы, входящей в экосистему OntoMath.

Оранжевым цветом выделена онтология $\text{OntoMath}^{\text{Edu}}$, являющаяся источником понятий для всех остальных образовательных компонентов экосистемы. Серым цветом отмечены наборы данных, применяемые в соответствующих сервисах экосистемы. Зеленым цветом обозначен центральный компонент образовательной части экосистемы OntoMath – интеллектуальная цифровая образовательная платформа для школьной математики. Синим цветом обозначены программные сервисы на интеллектуальной цифровой образовательной платформе.



Рис. 2. Образовательная подсистема цифровой экосистемы OntoMath . Серым цветом выделены наборы данных, зеленым цветом обозначена интеллектуальная цифровая образовательная платформа для школьной математики, синим цветом обозначены программные сервисы

Отметим, что в математических документах существенная часть информации содержится в формулах, которые в поисковых сервисах общего назначения, как правило, не учитываются. Сервисы семантического поиска по математическим формулам, представленные в экосистеме OntoMath , позволяют по концептам, указанным в запросе, производить поиск формул, включающих формульные выражения этих концептов. Для выполнения разметки и аннотирования математических учебных материалов разработаны сервис семантической разметки и справочная база данных [18, 19]. Также создан ресурс, содержащий математические утвержде-

ния, представленные различными степенями формализации, – этот ресурс в экосистеме называется «Параллельный формальный/неформальный корпус математических утверждений» [20]. Для проверки математических знаний разработан сервис автоматической генерации тестовых вопросов [21]. Указанные сервисы подробнее описаны ниже в разделе 3.

2. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ОНТОЛОГИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ

2.1. Онтология профессиональной математики **OntoMath^{PRO}**

Онтология профессионального математического знания **OntoMath^{PRO}** разрабатывается с 2012 года, и первая ее версия представлена в [22]. В настоящей статье рассмотрены подход и некоторые частные решения по использованию онтологии в образовательном процессе.

Так, например, на основе онтологии **OntoMath^{PRO}** разработаны тесты, по которым проводилась проверка испытуемых на знание применимости методов решения систем линейных алгебраических уравнений. В каждом тесте представлен фрагмент онтологии **OntoMath^{PRO}**, содержащий иерархию задач и иерархию методов решения систем линейных уравнений, а также частично указаны связи между задачами и методами. Согласно условию задания, испытуемые различного уровня подготовки (студенты, бакалавры, магистранты) должны были на основе предъявленного списка методов и задач восстановить пропущенные исходные связи между классами иерархий. Для оценивания результатов применены стандартные метрики информационного поиска – точность, полнота и F -мера. При этом под полнотой понимается отношение числа связей, правильно указанных в ответе на тест, к числу связей во фрагменте онтологии, используемом в тесте, а под точностью – отношение числа связей, правильно указанных тестируемым, к общему числу связей, обозначенных в ответе тестируемого. Результаты выполнения задания показали, что установление связей в упрощенной таксономии задач было хорошо выполнено всеми участниками опроса, а самой сложной частью теста стало установление отношения «*решает*». Предложенный подход, по нашему мнению, позволяет не только выполнить проверку отдельных фактов по предмету, но и помочь установить содержательные связи между понятиями и, таким образом, сформировать целостное представление о данной области знаний.

В настоящее время разработана следующая версия онтологии OntoMath^{PRO} (<https://github.com/CLLKazan/OntoMathPro>). Эта версия спроектирована на новой онтологической модели, которая также была применена при разработке образовательной онтологии OntoMath^{Edu} [23, 24].

2.2. Образовательная математическая онтология OntoMath^{Edu}

Образовательная математическая онтология OntoMath^{Edu} используется как основной ресурс в математической образовательной платформе Казанского федерального университета и применяется в ряде семантических сервисов цифровой экосистемы OntoMath. Подробно онтология OntoMath^{Edu} описана в [25]. Она организована в виде трех уровней: уровень предметной онтологии, лингвистический уровень и мета-онтологический уровень. Уровень предметной онтологии содержит независимые от языка концепты, относящиеся к разделу «Планиметрия» школьной математики. Лингвистический уровень включает русский, английский, татарский и испанский терминологические лексиконы, которые содержат информацию о морфологических и синтаксических характеристиках терминов [26].

2.3. Пререквизитные отношения в математических онтологиях

Важным применением онтологий является разработка семантических сервисов, поддерживающих процесс формирования образовательных траекторий. В образовательном процессе понятия предметной области изучаются в последовательности, заданной образовательной программой. В предметной онтологии последовательность изучения понятий можно обозначить с помощью пререквизитных отношений [27, 28]. Если, согласно образовательной программе, для изучения понятия B требуется предварительно изучить понятие A , то в предметной онтологии концепт A определяется как пререквизит для концепта B . Отметим, что пререквизитные отношения являются независимыми по отношению к таксономическим отношениям и образуют независимую иерархию онтологии.

В онтологии OntoMath^{Edu} спроектированы пререквизитные отношения, связывающие понятия раздела «Планиметрия» в соответствии с общеобразовательными программами России и Великобритании. При создании пререквизитных отношений использованы прямой и опосредованный подходы. В соответствии с прямым подходом пререквизитные отношения устанавливаются между двумя концептами онтологии. В качестве примера прямого подхода создания пререквизитов

приведем последовательность пререквизитных отношений, начинающуюся с концепта «Прямая» и продолженную до концепта «Теорема Пифагора». В соответствии с образовательной программой эта последовательность имеет вид: «Прямая» → «Луч» → «Угол» → «Прямой угол» → «Прямоугольный треугольник» → «Теорема Пифагора». Каждый концепт может входить в несколько пререквизитных последовательностей, например, концепты «Луч» и «Угол» из приведенной ранее последовательности также входят в последовательность пререквизитных отношений «Точка» → «Луч» → «Угол» → «Равные углы» → «Биссектриса угла». При опосредованном подходе пререквизитные отношения устанавливаются между образовательными уровнями, содержащими понятия, включенные в образовательную программу в соответствии с определенным годом обучения и профилем подготовки [28].

В онтологии OntoMath^{PRO} профессионального математического знания также разрабатывается система пререквизитных отношений. Эта система отражает последовательность изучения математических понятий в общих и специальных математических курсах университетов. В этом состоит основное отличие отношения «Пререквизит» от отношений «Класс–Подкласс» и «Определяется через», которые также используются при формировании образовательных траекторий в сервисах цифровой экосистемы OntoMath. Особенности указанных онтологических отношений проиллюстрированы на рисунках, приведенных далее. Покажем, как пример, взаимосвязи понятий онтологии, связанных с некоторыми концептами, использующими термин «производная». Отметим, что в профессиональной математике имеется большое число математических понятий, использующих термин «производная», и только часть из них изучается в университетах. На Рис. 3 и 4 показан фрагмент сети понятий онтологии OntoMath^{PRO}, содержащий несколько классов онтологии, в названии которых присутствует термин «Производная».

- ▼ ○ отображение
 - n -линейное отображение
 - E3144
 - Векторное произведение
 - Дисторсия
 - ▼ ○ Дифференцируемое отображение
 - ▼ ○ Производная отображения
 - Дифференциал Гато
 - Дифференциал Фреше
 - Производная Гато
 - Производная Фреше
 - ▶ ○ Ковариантное дифференцирование
 - Продолжение дифференциального оператора
 - Продолжение дифференциального уравнения

Рис. 3. Концепты «Производная Гато» и «Производная Фреше» в таксономии онтологии OntoMath^{PRO}

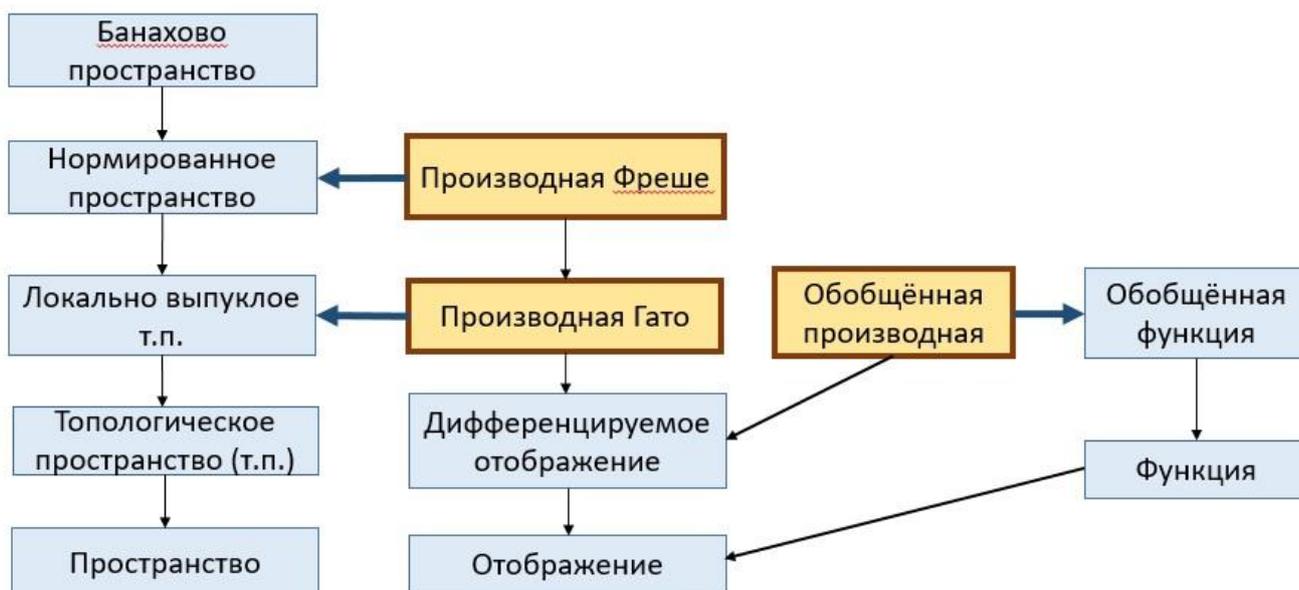


Рис. 4. Фрагмент сети понятий онтологии OntoMath^{PRO}. Отношение «Класс–Подкласс» отображается в виде вертикальной или диагональной стрелки, направленной от подкласса к родительскому классу, а для отношения «Определяется через» используется горизонтальная стрелка. Утолщенной рамкой и цветом выделены классы, имеющие в названии термин «Производная»

В университетские образовательные программы по математическому анализу, функциональному анализу и теории функций включены разделы, предпола-

гающие изучение обобщенной производной, производных Фреше и Гато, производной дробного порядка и др. Производная Фреше определяется для нормированных пространств (см. [29]). Производная Гато является обобщением производной Фреше для отображений, определенных на локально выпуклых топологических пространствах [30]. В определении производной Фреше используется понятие нормированного пространства, а в определении производной Гато – более общее понятие локально выпуклого топологического пространства. В университетских курсах по функциональному анализу, как правило, производная Гато (слабая производная) и производная Фреше (сильная производная) изучаются одновременно и определяются в банаховых (см., например, [31]) или нормированных пространствах (см., например, [32]). На Рис. 5 показано, как последовательности изучения этих понятий определяются пререквизитными отношениями в математической онтологии. Первая цепочка пререквизитных отношений соответствует последовательности изучения указанных понятий согласно [31]. Вторая цепочка пререквизитов определяет последовательность изучения математических понятий согласно учебнику [32].

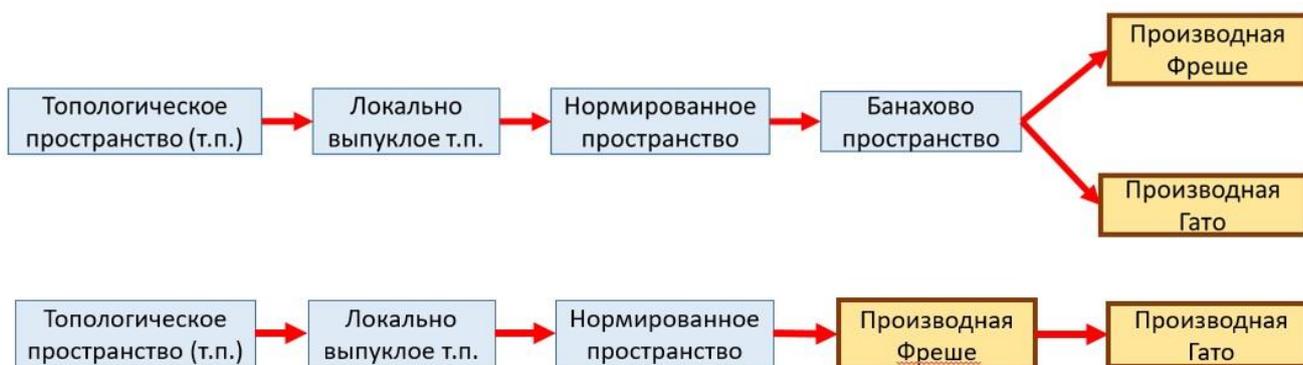


Рис. 5. Фрагмент сети пререквизитных отношений, определяющей последовательность изучения понятий «Производная Гато» и «Производная Фреше». Последовательность концептов связана пререквизитными отношениями, обозначенными стрелками.

3. СИСТЕМА ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СЕРВИСОВ ЭКОСИСТЕМЫ OntoMath

Приведем краткое описание семантических сервисов, входящих в образовательные компоненты цифровой экосистемы OntoMath (Рис. 2).

3.1. Сервис MathEduSearch семантического поиска по математическим формулам

Поиск документов, включающих формулы с математическими понятиями, наиболее применим в научной среде. Для образовательных приложений предложена модификация сервиса семантического поиска, направленная на поиск формул по названию и понятиям, включенным в них. В качестве набора данных, лежащих в основе сервиса, выступает параллельный формальный/неформальный корпус математических утверждений. Функционал разработанного прототипа сервиса аналогичен функционалу сервиса Semantic Formula Search семантического поиска по математическим формулам [33, 34]. Особенностью прототипа сервиса является использование нового механизма выдачи документов, содержащих возвращаемые формулы. Сервис работает следующим образом.

В поисковой запрос передаются математические понятия или их обозначения, для которых необходимо найти содержащие их формулы. В качестве результата поисковый сервис выводит веб-страницу, содержащую список релевантных формул с визуализацией каждой из них. Для выполнения этой задачи на языке JavaScript с использованием библиотеки MathJax [35] разработан программный модуль, осуществляющий встраивание в веб-страницу формул в LaTeX-нотации, общепринятых названий формул, а также текстовые описания этих формул.

3.2. Сервис семантического аннотирования учебных материалов и справочная база данных

Этот сервис выполняет поиск и аннотирование математических концептов из онтологии OntoMath^{Edu} в образовательных документах. В настоящее время данный сервис встроен в процесс разработки в Казанском федеральном университете материалов курса дистанционного образования «Технология решения планиметрических задач» [2]. Основной задачей сервиса являются выделение концептов онтологии OntoMath^{Edu} на страницах курса и обогащение страниц с этими концептами

ссылками на результаты работы сервиса визуализации подграфов семантической сети образовательной математической онтологии [19].

3.3. Сервис визуализации подграфов семантической сети образовательной математической онтологии

Сервис визуализации подграфов семантической сети принимает в качестве входных данных целевой концепт онтологии $\text{OntoMath}^{\text{Edu}}$ и формирует подграф онтологии, состоящий из концептов, связанных с целевым концептом онтологическими отношениями [36]. В образовательном курсе в качестве целевых концептов выступают концепты, аннотированные сервисом семантического аннотирования. Информация о концептах и образовательных уровнях извлекается из онтологии $\text{OntoMath}^{\text{Edu}}$ [28]. Сервис визуализации также предусматривает возможность фильтрации отображаемых понятий по образовательным уровням.

В качестве примера на Рис. 6 показана страница сервиса визуализации для концепта *Биссектриса треугольника*, в блоке «Определение» дано определение концепта из одного или нескольких учебников по геометрии, в блоке «Посмотреть на:» приведены ссылки на внешние ресурсы по текущему концепту, в блоке «Изучи сначала» – пререквизиты текущего понятия, а в блоке «Связанные понятия» – онтологически связанные концепты для текущего понятия.

Биссектриса треугольника

Определение
Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется биссектрисой треугольника. (Л.С. Атанасян)
Отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до точки пересечения со стороной треугольника называется биссектрисой треугольника (И.Ф. Шарыгин)

Посмотреть на: [Mathvox](#), [Yaklass](#), [Wikipedia](#)

Изучи сначала [Биссектриса угла](#); [Треугольник](#)

Связанные понятия [Треугольник](#)

- ▲ [Чевiana треугольника](#)
- ▼ [Биссектриса внешнего угла треугольника](#); [Биссектриса внутреннего угла треугольника](#)

Рис. 6. Страница концепта *Биссектриса треугольника* в сервисе визуализации подграфов семантической сети.

Два нижних блока на Рис. 6 снабжены элементами управления в форме треугольников, которые позволяют производить навигацию по иерархии объектов онтологии (отражаются непосредственный надкласс текущего концепта и список его подклассов). Все концепты на странице сервиса представлены в виде гиперссылок, переводящих пользователя на страницы концептов.

3.4. Параллельный формальный/неформальный корпус математических утверждений

Данный ресурс содержит математические утверждения, представленные тремя способами: предложения на естественном языке, формулы в нотации LaTeX и формулы на языке OpenMath [20, 37].

Запись в базе данных корпуса содержит следующие поля:

1. математическое утверждение на естественном языке, извлеченное из учебных математических текстов;
2. представление этого утверждения в виде формулы в формате LaTeX;
3. формализация формулы в формате представления семантики математических объектов OpenMath (<https://openmath.org/>), где в качестве контентных словарей OpenMath (OpenMath content dictionaries) использована онтология OntoMath^{Edu}.

На Рис. 7 представлен пример записи «Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов» из указанного корпуса.

Утверждение на естественном языке	Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов
Визуализация утверждения в виде формулы	$S_{ABC} = (a*b)/2$, где ABC – прямоугольный треугольник, S_{ABC} – площадь прямоугольного треугольника, a, b – катеты
Представление утверждения в виде формулы (LaTeX-код)	$S_{\{ABC\}} = \frac{a*b}{2} \text{ где } ABC - \text{прямоугольный треугольник, } S_{\{ABC\}} - \text{площадь прямоугольного треугольника, } a, b \text{ – катеты.}$

<p>Формализация в формате OpenMath (в визуальном виде)</p>	$\forall ABC_{\text{type:RightTriangle}}, a_{\text{type:LegOfTheRightTriangle}}, b_{\text{type:LegOfTheRightTriangle}}, S_ABC_{\text{type:AreaOfTheRightTriangle}}$ $\text{isSideOfTriangle}(a, ABC) \wedge \text{isSideOfTriangle}(b, ABC) -$ $>$ $(a * b)/2 = S_ABC$
---	--

Рис. 7. Пример записи из параллельного формального/неформального корпуса образовательных математических текстов.

В качестве исходных математических текстов были использованы учебные материалы по курсу планиметрии средней школы. Представления утверждений в форматах LaTeX и OpenMath построены вручную.

Сформированный корпус математических утверждений может быть использован в качестве тестовой коллекции при разработке методов автоматической формализации описаний формул на естественном языке в математических документах. На базе корпуса разработан сервис для автоматической генерации тестовых вопросов, описанный ниже. Также планируется применение корпуса математических утверждений в качестве источника данных для сервиса семантического поиска формул в образовательных приложениях.

3.5. Сервис автоматической генерации тестовых вопросов для проверки математических знаний

Данный сервис применяется для быстрого создания больших массивов заданий по геометрии общеобразовательного уровня. Тестовые задания с вводом ответа создаются на основе формализации OpenMath для формул из параллельного формально-неформального корпуса математических учебных материалов [21]. Формула на языке OpenMath представляется в виде дерева, включающего отношения между понятиями, включенными в формулу. Такая структура позволяет создавать задания и проверять ответы в автоматическом режиме.

Процесс генерации тестового задания состоит из следующих этапов:

1. Производится выбор случайной записи из корпуса, и из нее выделяется OpenMath-утверждение.
2. Строится дерево логической структуры утверждения, и в нем производится поиск элементов, соответствующих объектам формулы.

3. Из найденных элементов выбирается случайная искомая переменная, а для всех остальных элементов генерируется случайное значение в допустимых интервалах. Допустимые интервалы значений переменных определены экспертами и внедрены в OpenMath.
4. Формируется текст задания с указанием заданных и неизвестных значений объектов формулы. Обозначения переменных содержатся в формализации OpenMath.

Сгенерированное задание сохраняется в базе данных тестовых заданий для дальнейшего применения в образовательном процессе. На Рис. 8 приведен пример генерации задания. В строке «Формула на естественном языке» приведена текстовая формулировка формулы, на основе которой сформировано тестовое задание. Строка «Текст сгенерированного задания» содержит автоматически сгенерированный текст задания с указанием всех переменных, включенных в формулу, заданные значения, а также искомую переменную.

Формула на естественном языке	Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов
Визуализация формулы	$S_{ABC} = (a*b)/2$, где ABC – прямоугольный треугольник, S_{ABC} – площадь прямоугольного треугольника, a, b – катеты
Текст сгенерированного задания	Дано: Прямоугольный треугольник ABC; Катет a прямоугольного треугольника; Катет b прямоугольного треугольника; Площадь прямоугольного треугольника $S_{\triangle ABC}$. $b = 10$; $S_{\triangle ABC} = 20$. Найти: a.
Формализация формулы в OpenMath (в визуальном виде)	$\forall ABC_{type:RightTriangle}, a_{type:LegOfTheRightTriangle}, b_{type:LegOfTheRightTriangle}, S_{ABC}_{type:AreaOfTheRightTriangle}$ $isSideOfTriangle(a, ABC) \wedge isSideOfTriangle(b, ABC) \rightarrow$ $(a * b)/2 = S_{ABC}$

Рисунок 8. Пример генерации задания с помощью сервиса автоматической генерации тестовых вопросов для проверки математических знаний

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты по разработке программных инструментов и сервисов, спроектированных с целью поддержки образовательного процесса в области математики. Эти программные инструменты являются семантическими, и их функционал основан на использовании онтологий, входящих в состав цифровой экосистемы OntoMath. Дальнейшее развитие образовательных сервисов связано с применением пререквизитных отношений онтологий OntoMath^{PRO} и OntoMath^{Edu} с целью формирования индивидуальных образовательных траекторий. Планируется разработка образовательной рекомендательной системы, предоставляющей доступ к разделам дополнительных образовательных источников (учебников, интернет-ресурсов) для уточнения или расширения описания понятия, обозначенного в запросе пользователя системы.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00105).

Авторы признательны А.М. Елизарову, А.В. Кирилловичу, Л.Р. Шакировой и М.В. Фалилеевой за обсуждение работы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moodle – Open-source Learning Platform.
URL: <https://moodle.org/?lang=ru>.
2. Технология решения планиметрических задач.
<https://edu.kpfu.ru/course/view.php?id=2652>.
3. Муромцев Д. И. Модели и методы индивидуализации электронного обучения в контексте онтологического подхода // Онтологии проектирования. 2020. Т. 10. № 1. С. 34–49. <https://doi.org/10.18287/2223-9537-2020-10-1-34-49>.
4. Anderson J. Q. Individualisation of Higher Education: How Technological Evolution can Revolutionise Opportunities for Teaching and Learning // International Social Science Journal. 2013. V. 64. No. 213–214. P. 305–316.
<https://doi.org/10.1111/issj.12046>.
5. Абрамский М. М., Батырова Э. Ф., Марданова А. Р., Ахметзянова Т.А. Генерация индивидуальных образовательных траекторий и расписания обучения

в парадигме индивидуализации образования // Электронные библиотеки. 2018. Т. 21. № 3–4. С. 129–145. URL: <https://rdl-journal.ru/article/view/466>.

6. *Jakus G., Milutinović V., Omerović S., Tomažič S.* Concepts, Ontologies, and Knowledge Representation. Series: SpringerBriefs in Computer Science. Springer New York, NY, 2013. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7822-5>.

URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-7822-5>.

7. *Елизаров А. М., Кириллович А. В., Липачёв Е. К., Невзорова О. А., Шакурова Л. Р.* Семантические технологии в математическом образовании: онтологии и открытые связанные данные // Ученые записки ИСГЗ. 2018. Т. 16. № 1. С. 222–227.

8. *Tzoumpa D., Mitropoulos S.* Semantic Web Technologies for Ontologies Description: Case study in Geometry Education // In: 2020 5th South-East Europe Design Automation, Computer Engineering, Computer Networks and Social Media Conference (SEEDA-CECNSM), Corfu, Greece. 2020. P. 1–5.

<https://doi.org/10.1109/SEEDA-CECNSM49515.2020.9221781>.

9. *Tzoumpa D., Karvounidis T., Douligeris C.* Circle's Ontology Extended: Circumference and Surface Area of a Circle // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2020. Vol. 916. P. 120–132.

10. *Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O.* Digital Ecosystem OntoMath: Mathematical Knowledge Analytics and Management // L. Kalinichenko, S. Kuznetsov, and Y. Manolopoulos (Eds.). Revised Selected Papers of the XVIII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2016), Ershovo, Moscow, Russia, October 11–14, 2016. Communications in Computer and Information Science. Springer, 2017. Vol. 706. P. 33–46. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57135-5_3.

11. *Elizarov A. M., Zhiltsov N. G., Kirillovich A. V., Lipachev E. K., Nevzorova O. A., Solovyev V. D.* The OntoMath ecosystem: Ontologies and applications for math knowledge management // Semantic Representation of Mathematical Knowledge Workshop, Fields Institute, Toronto, Canada, February 5, 2016.

URL: <https://video-archive.fields.utoronto.ca/view/4698>.

12. *Елизаров А. М., Липачев Е. К.* Цифровая библиотека Lobachevskii-DML в научном пространстве математических знаний // Научно-техническая информация. Серия 1: Организация и методика информационной работы. 2023. № 1. С. 32–37. <https://doi.org/10.36535/0548-0019-2023-01-3>.

13. *Елизаров А. М., Кириллович А. В., Липачёв Е. К., Невзорова О. А.* Цифровая экосистема OntoMath как подход к построению пространства математических знаний // *Электронные библиотеки*. 2023. Т. 26. № 2. С. 154–202.

<https://doi.org/10.26907/1562-5419-2023-26-2-154-202>.

URL: <https://rdl-journal.ru/article/view/771>.

14. *Nevzorova O., Zhiltsov N., Kirillovich A., Lipachev E.* OntoMath^{PRO} Ontology: A Linked Data Hub for Mathematics // P. Klinov and D. Mouromstev (Eds.). *Proceedings of the 5th International Conference on Knowledge Engineering and Semantic Web (KESW 2014)*, Kazan, Russia, September 29 – October 1, 2014. *Communications in Computer and Information Science*. Springer, Cham, 2014. Vol. 468. P. 105–119.

https://doi.org/10.1007/978-3-319-11716-4_9.

15. *Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., Shakirova L.* OntoMath^{EDU}: Towards an Educational Mathematical Ontology // E. Brady et al. (Eds.). *Workshop Papers at 12th Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM-WS 2019)*, Prague, Czech Republic, 8–12 July 2019. *CEUR Workshop Proceedings*. CEUR-WS, 2020. Vol. 2634. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2634/WiP1.pdf>.

16. *Елизаров А. М., Кириллович А. В., Липачёв Е. К., Невзорова О. А.* Цифровая экосистема OntoMath: взаимодействие семантических сервисов и математических онтологий // *Научный сервис в сети Интернет: труды XXIV Всероссийской научной конференции (19–22 сентября 2022 г., онлайн)*. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2022. С. 167–178.

<https://doi.org/10.20948/abrau-2022-40>.

URL: <https://keldysh.ru/abrau/2022/theses/40.pdf>.

17. *Kirillovich A. V., Nevzorova O. A., Lipachev E. K.* OntoMathPRO 2.0 Ontology: Updates of Formal Model // *Lobachevskii J. Math.* 2022. Vol. 43. No 12. P. 3504–3514.

<https://doi.org/10.1134/S1995080222150136>.

URL: <https://link.springer.com/article/10.1134/S1995080222150136>.

18. *Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., Dyupina A., Shakirova L.* Prerequisite Relationships of the OntoMath^{Edu} Educational Mathematical Ontology // J.C. Figueroa-García et al. (Eds.). *Proceedings of the 8th Workshop on Engineering Applications (WEA 2021)*, Medellín, Colombia, October 6–8, 2021. *Communications in Computer and Information Science*. Springer, 2021. Vol. 1431. P. 517–524.

19. *Николаев К. С., Невзорова О. А.* Метод автоматической семантической

разметки математических образовательных текстов // Информационные технологии в образовании и науке (ИТОН–2022) и II International Workshop “Digital Technologies for Teaching and Learning” (DTTL). Материалы III Международного форума по математическому образованию: Международной научно-практической конференции и II Международного научного семинара. Казань, 2022. С. 181–190.

20. *Kirillovich A., Nevzorova O., Nikolaev K., Galiaskarova K.* Towards a Parallel Informal-Formal Corpus of Educational Mathematical Texts in Russian // Zhengbing Hu et al. (Eds.). Proceedings of the 2019 International Symposium on Computer Science, Digital Economy and Intelligent Systems (CSDEIS 2019), Moscow, Russia, on 4–6 October 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing. Springer, 2020. Vol. 1127. P. 325–334. https://doi.org/10.1007/978-3-030-39216-1_29.

21. *Nikolaev K., Kirillovich A., Nevzorova O.* A Corpus-Based Approach to Elementary Geometry Knowledge Test Generation // L. Gómez Chova et al. (Eds.). Proceedings of the 14th International Technology, Education and Development Conference (INTED 2020), Valencia, Spain, 2–4 March 2020. IATED, 2020. P. 6342–6348.

22. *Nevzorova O., Zhiltsov N., Kirillovich A., Lipachev E.* OntoMath^{PRO} Ontology: A Linked Data Hub for Mathematics // P. Klinov and D. Mouromstev (Eds.). Proceedings of the 5th International Conference on Knowledge Engineering and Semantic Web (KESW 2014), Kazan, Russia, September 29 – October 1, 2014. Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham, 2014. Vol. 468. P. 105–119. https://doi.org/10.1007/978-3-319-11716-4_9.

23. *Елизаров А. М., Кириллович А. В., Липачёв Е. К., Невзорова О. А.* Онтология математического знания OntoMath^{PRO} // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507. № 1. С. 29–35. <https://doi.org/10.31857/S2686954322700011>.

24. *Nevzorova O. A., Falileeva M. V., Kirillovich A. V., Lipachev E. K., Shakirova L. R., Dyupina A. E.* OntoMathEdu Educational Ontology: Problems of Ontological Engineering // Pattern Recognition and Image Analysis. 2023. Vol. 33. No. 3. P. 460–466.

25. *Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., Shakirova L.* OntoMath^{EDU}: Towards an Educational Mathematical Ontology // E. Brady et al. (Eds.). Workshop Papers at 12th Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM-WS 2019), Prague, Czech Republic, 8–12 July 2019. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2020. Vol. 2634. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2634/WiP1.pdf>.

26. Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., Shakirova L. OntoMath^{EDU}: A Linguistically Grounded Educational Mathematical Ontology // C. Benz Müller and B. Miller (Eds.). Proceedings of the 13th International Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM 2020), Bertinoro, Italy, July 26–31, 2020. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2020. Vol. 12236. P. 157–172.

https://doi.org/10.1007/978-3-030-53518-6_10.

27. Loukachevitch N., Komissarov A., Dobrov B., Shternov S. Using Ontology for Natural Sciences and Technologies for Vacancies Analysis // CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2021. Vol. 2910. P. 30–38.

URL: <http://sunsite.informatik.rwth-aachen.de/Publications/CEUR-WS/Vol-2910/short2.pdf>.

28. Фалилеева М. В., Кириллович А. В., Невзорова О. А., Шакирова Л. Р., Липачёв Е. К., Дюпина А. Э. Системы образовательных проекций, уровней и пререквизитов математической онтологии OntoMath^{EDU} // Электронные библиотеки. 2021. Т. 24. № 3. С. 505–530. <https://doi.org/10.26907/1562-5419-2021-24-3-505-530>. URL: <https://rdl-journal.ru/article/view/691>.

29. Fréchet M. Sur les fonctionnelles continues // Acc. Ec. Norm. 1910. 27 (3). P. 193–216. URL: http://www.numdam.org/article/ASENS_1910_3_27__193_0.pdf.

30. Gateaux R. Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1913. Vol. 157. P. 325–327. URL: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k31103/f325.image>.

31. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 752 с.

32. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 624 с.

33. OntoMath Semantic Formula Search.

URL: <https://lobachevskii-dml.ru/mathsearch>.

34. Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O. Semantic Formula Search in Digital Mathematical Libraries // Proceedings of the 2nd Russia and Pacific Conference on Computer Technology and Applications (RPC 2017), Vladivostok, Russia, 25–29 September, 2017. IEEE, 2017. P. 39–43.

<https://doi.org/10.1109/RPC.2017.8168063>.

35. MatJax. Beautiful and accessible math in all browsers.

URL: <https://www.mathjax.org/>.

36. Николаев К. С. Сервис генерации учебных карточек математических понятий для дистанционного курса по геометрии // Электронные библиотеки. 2023. Т. 26. № 3. С. 365–377. <https://doi.org/10.26907/1562-5419-2023-26-3-365-377>.

URL: <https://rdl-journal.ru/article/view/785>.

37. The OpenMath Standards. URL: <https://openmath.org/standard/>.

SEMANTIC SERVICES OF THE DIGITAL ECOSYSTEM ONTOMATH FOR MATHEMATICAL EDUCATION

O. A. Nevzorova¹ [0000-0001-8116-9446], E. K. Lipachev² [0000-0001-7789-2332],

K. S. Nikolaev³ [0000-0003-3204-238X]

¹⁻³ Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008

³ Joint Supercomputer Center of the Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia

¹onevzoro@gmail.com, ²elipachev@gmail.com, ³konnikolaeff@yandex.ru,

Abstract

We present a set of semantic services developed by us to support the educational process in mathematics. The functionality of these services is based on the use of mathematical ontologies OntoMath^{Edu} and OntoMath^{PRO}. The ontology of professional mathematical knowledge OntoMath^{PRO} is designed to classify and systematize the concepts of professional mathematics and includes several important areas of mathematics. Educational mathematical ontology OntoMath^{Edu} systematically represents knowledge on the training course “Planimetry”. For the use of ontologies in educational applications, an approach to the design of prerequisite relations in these ontologies has been developed. To support mathematical education, we have developed: a service for semantic search by mathematical formulas, a service for semantic annotation of educational materials, a service for visualizing subgraphs of the OntoMath^{Edu} ontology semantic network, a parallel formal/informal corpus of mathematical statements, a system for automatically generating test questions in mathematical disciplines.

We provide examples of successful application of the developed software tools.

The created software tools are built into the OntoMath digital ecosystem. This ecosystem implements the interaction of semantic services for managing mathematical knowledge.

Keywords: *Digital ecosystem, OntoMath ecosystem, ontology, OntoMath^{PRO} mathematical ontology, OntoMath^{Edu} educational ontology, prerequisite relation, semantic service.*

REFERENCES

1. Moodle – Open-source Learning Platform.
URL: <https://moodle.org/?lang=ru>.
2. Tekhnologiya resheniya planimetriceskikh zadach.
<https://edu.kpfu.ru/course/view.php?id=2652>.
3. *Mouromtsev D.* Models and methods of e-learning individualization in the context of ontological approach // *Ontology of Designing*. 2020. Vol. 10. No. 1. P. 34–49.
<https://doi.org/10.18287/2223-9537-2020-10-1-34-49>.
4. *Anderson J. Q.* Individualisation of Higher Education: How Technological Evolution can Revolutionise Opportunities for Teaching and Learning // *International Social Science Journal*. 2013. V. 64. No. 213–214. P.305–316.
<https://doi.org/10.1111/issj.12046>.
5. *Abramskiy M. M., Batyrova E. F., Mardanova A. R., Akhmetzyanova T. A.* Generation of Individual Educational Routes and Learning Schedule in Individualization Paradigm // *Russian Digital Libraries Journal*. 2018. V. 21. No. 3–4. P.129–145.
URL: <https://rdl-journal.ru/article/view/466>.
6. *Jakus G., Milutinović V., Omerović S., Tomažič S.* Concepts, Ontologies, and Knowledge Representation. Series: SpringerBriefs in Computer Science. Springer New York, 2013. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7822-5>.
URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-7822-5>.
7. *Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O., Shakirova L.* Semanticheskie tekhnologii v matematicheskom obrazovanii: ontologii i otkrytye svyazannye dannye // *Uchenye zapiski ISGZ*. 2018. T. 16. № 1. S. 222–227.
8. *Tzoumpa D., Mitropoulos S.* Semantic Web Technologies for Ontologies Description: Case study in Geometry Education // In: 2020 5th South-East Europe Design Automation, Computer Engineering, Computer Networks and Social Media Conference

(SEEDA-CECNSM), Corfu, Greece. 2020. P. 1–5.

<https://doi.org/10.1109/SEEDA-CECNSM49515.2020.9221781>.

9. *Tzoumpa D., Karvounidis T., Douligeris C.* Circle's Ontology Extended: Circumference and Surface Area of a Circle // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020. Vol. 916. P. 120–132.

10. *Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O.* Digital Ecosystem OntoMath: Mathematical Knowledge Analytics and Management // L. Kalinichenko, S. Kuznetsov, and Y. Manolopoulos (Eds.). *Revised Selected Papers of the XVIII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2016)*, Ershovo, Moscow, Russia, October 11–14, 2016. *Communications in Computer and Information Science*. Springer, 2017. Vol. 706. P. 33–46. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57135-5_3.

11. *Elizarov A. M., Zhiltsov N. G., Kirillovich A. V., Lipachev E. K., Nevzorova O. A., Solovyev V. D.* The OntoMath ecosystem: Ontologies and applications for math knowledge management // *Semantic Representation of Mathematical Knowledge Workshop*, Fields Institute, Toronto, Canada, February 5, 2016.

URL: <https://video-archive.fields.utoronto.ca/view/4698>.

12. *Elizarov A. M., Lipachev E. K.* Lobachevskii Digital Library in the Scientific Space of Mathematical Knowledge // *Scientific and Technical Information Processing*. 2023. Vol. 50. No. 1. P. 35–39. <https://doi.org/10.3103/S0147688223010021>.

13. *Elizarov A. M., Kirillovich A. V., Lipachev E. K., Nevzorova O. A.* Digital Ecosystem OntoMath as an Approach to Building the Space of Mathematical Knowledge // *Russian Digital Libraries Journal*. 2023. Vol. 26. No 2. P. 154–202.

<https://doi.org/10.26907/1562-5419-2023-26-2-154-202>.

URL: <https://rdl-journal.ru/article/view/771>.

14. *Nevzorova O., Zhiltsov N., Kirillovich A., Lipachev E.* OntoMath^{PRO} Ontology: A Linked Data Hub for Mathematics // P. Klinov and D. Mouromstev (Eds.). *Proceedings of the 5th International Conference on Knowledge Engineering and Semantic Web (KESW 2014)*, Kazan, Russia, September 29 – October 1, 2014. *Communications in Computer and Information Science*. Springer, Cham, 2014. Vol. 468. P. 105–119.

https://doi.org/10.1007/978-3-319-11716-4_9.

15. *Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., Shakirova L.* OntoMath^{EDU}: Towards an Educational Mathematical Ontology // E. Brady et al. (Eds.). *Workshop*

Papers at 12th Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM-WS 2019), Prague, Czech Republic, 8–12 July 2019. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2020. Vol. 2634. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2634/WiP1.pdf>.

16. *Elizarov A. M., Kirillovich A. V., Lipachev E. K., Nevzorova O. A.* OntoMath Digital Ecosystem: Semantic Service and Mathematical Ontologies // *Nauchnyj servis v seti Internet: trudy XXIV Vserossijskoj nauchnoj konferencii (19–22 sentyabrya 2022 g., onlajn)*. M.: IPM im. M.V.Keldysha, 2022. S. 167–178.

<https://doi.org/10.20948/abrau-2022-40>.

URL: <https://keldysh.ru/abrau/2022/theses/40.pdf>.

17. *Kirillovich A. V., Nevzorova O. A., Lipachev E. K.* OntoMathPRO 2.0 Ontology: Updates of Formal Model // *Lobachevskii J. Math.* 2022. Vol. 43. P. 3504–3514 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1995080222150136>.

URL: <https://link.springer.com/article/10.1134/S1995080222150136>.

18. *Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., Dyupina A., and Shakirova L.* Prerequisite Relationships of the OntoMath^{Edu} Educational Mathematical Ontology // J.C. Figueroa-García et al. (Eds.). *Proceedings of the 8th Workshop on Engineering Applications (WEA 2021), Medellín, Colombia, October 6–8, 2021. Communications in Computer and Information Science.* Springer, 2021. Vol. 1431. P. 517–524.

19. *Nikolaev K. S., Nevzorova O. A.* Metod avtomaticheskoy semanticheskoy razmetki matematicheskikh obrazovatel'nyh tekstov // *Informacionnye tekhnologii v obrazovanii i nauke (ITON–2022) i II International Workshop “Digital Technologies for Teaching and Learning” (DTTL)*. Materialy III Mezhdunarodnogo foruma po matematicheskomu obrazovaniyu: Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii i II Mezhdunarodnogo nauchnogo seminar. Kazan', 2022. S. 181–190.

20. *Kirillovich A., Nevzorova O., Nikolaev K., Galiaskarova K.* Towards a Parallel Informal-Formal Corpus of Educational Mathematical Texts in Russian // Zhengbing Hu et al. (Eds.). *Proceedings of the 2019 International Symposium on Computer Science, Digital Economy and Intelligent Systems (CSDEIS 2019), Moscow, Russia, on 4–6 October 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing.* Springer, 2020. Vol. 1127. P. 325–334. https://doi.org/10.1007/978-3-030-39216-1_29.

21. *Nikolaev K., Kirillovich A., Nevzorova O.* A Corpus-Based Approach to Elementary Geometry Knowledge Test Generation // L. Gómez Chova et al. (Eds.). *Proceedings of the 14th International Technology, Education and Development Conference*

(INTED 2020), Valencia, Spain, 2–4 March 2020. IATED, 2020. P. 6342–6348.

22. *Nevzorova O., Zhiltsov N., Kirillovich A., Lipachev E.* OntoMath^{PRO} Ontology: A Linked Data Hub for Mathematics // P. Klinov and D. Mouromstev (Eds.). Proceedings of the 5th International Conference on Knowledge Engineering and Semantic Web (KESW 2014), Kazan, Russia, September 29 – October 1, 2014. Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham, 2014. Vol. 468. P. 105–119.

https://doi.org/10.1007/978-3-319-11716-4_9.

23. *Elizarov A. M., Kirillovich A. V., Lipachev E. K., Nevzorova O. A.* OntoMath^{PRO}: An Ontology of Mathematical Knowledge // Doklady Mathematics. 2022. Vol. 106. No. 3. S. 429–435. <https://doi.org/10.1134/S1064562422700016>.

24. *Nevzorova O. A., Falileeva M. V., Kirillovich A. V., Lipachev E. K., Shakirova L. R., Dyupina A. E.* OntoMathEdu Educational Ontology: Problems of Ontological Engineering // Pattern Recognition and Image Analysis. 2023. Vol. 33. No. 3. P. 460–466.

25. *Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., Shakirova L.* OntoMath^{EDU}: Towards an Educational Mathematical Ontology // E. Brady et al. (Eds.). Workshop Papers at 12th Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM-WS 2019), Prague, Czech Republic, 8–12 July 2019. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2020. Vol. 2634. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2634/WiP1.pdf>.

26. *Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., Shakirova L.* OntoMath^{EDU}: A Linguistically Grounded Educational Mathematical Ontology // C. Benzmüller and B. Miller (Eds.). Proceedings of the 13th International Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM 2020), Bertinoro, Italy, July 26–31, 2020. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2020. Vol. 12236. P. 157–172.

https://doi.org/10.1007/978-3-030-53518-6_10.

27. *Loukachevitch N., Komissarov A., Dobrov B., Shternov S.* Using Ontology for Natural Sciences and Technologies for Vacancies Analysis // CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2021. Vol. 2910. P. 30–38. URL: <http://sunsite.informatik.rwth-aachen.de/Publications/CEUR-WS/Vol-2910/short2.pdf>.

28. *Falileeva M. V., Kirillovich A. V., Nevzorova O. A., Shakirova L. R., Lipachev E. K., Dyupina A. E.* Educational Projection Systems, Levels and Prerequisites of Mathematical Ontology OntoMath^{EDU} // Russian Digital Libraries Journal. 2021. Vol. 24. No. 3. P. 505–530. <https://doi.org/10.26907/1562-5419-2021-24-3-505-530>.

URL: <https://rdl-journal.ru/article/view/691>.

29. *Fréchet M.* Sur les fonctionelles continues // *Acc. Ec. Norm.* 1910. Vol. 27, No. 3. P. 193–216.

URL: http://www.numdam.org/article/ASENS_1910_3_27__193_0.pdf.

30. *Gateaux R.* Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques // *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 1913. Vol. 157. P. 325–327.

URL: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k31103/f325.image>.

31. *Kantorovich L. V., Akilov G. P.* *Funkcional'nyj analiz.* M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1984. 752 s.

32. *Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* *Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza.* M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1989. 624 s.

33. *OntoMath Semantic Formula Search.*

URL: <https://lobachevskii-dml.ru/mathsearch>.

34. *Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O.* *Semantic Formula Search in Digital Mathematical Libraries* // *Proceedings of the 2nd Russia and Pacific Conference on Computer Technology and Applications (RPC 2017), Vladivostok, Russia, 25–29 September, 2017.* IEEE, 2017. P. 39–43.

<https://doi.org/10.1109/RPC.2017.8168063>.

35. *MatJax.* Beautiful and accessible math in all browsers.

URL: <https://www.mathjax.org/>.

36. *Nikolaev K. S.* *Service for Generating Educational Cards of Mathematical Concepts for a Distance Learning Course in Geometry* // *Russian Digital Libraries Journal.* 2023. Vol. 26. No. 3. P. 365–377.

<https://doi.org/10.26907/1562-5419-2023-26-3-365-377>.

URL: <https://rdl-journal.ru/article/view/785>.

37. *The OpenMath Standards.* URL: <https://openmath.org/standard/>.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



НЕВЗОРОВА Ольга Авенировна – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета.

Научные интересы: онтологическое моделирование, Semantic Web, лингвистические открытые связанные данные, управление математическим знанием.

Olga NEVZOROVA – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Information Systems Department of the Institute of Computational Mathematics and Information Technologies of the Kazan Federal University.

Research interests: ontology engineering, Semantic Web, Linguistic Linked Data, mathematical knowledge management.

email: onevzoro@gmail.com.

ORCID: 0000-0001-8116-9446.



ЛИПАЧЁВ Евгений Константинович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры цифровой аналитики и технологий искусственного интеллекта Института информационных технологий и интеллектуальных систем Казанского федерального университета.

Научные интересы: цифровые библиотеки, единое пространство научных математических знаний, интеллектуальный анализ данных, рекомендательные системы, облачные вычисления, технологии извлечения знаний.

Evgeny Konstantinovich LIPACHEV – Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University.

Research interests: digital libraries, common space of scientific mathematical knowledge, data mining, recommender systems, cloud computing, knowledge extraction technologies.

email: elipachev@gmail.com;

ORCID: 0000-0001-7789-2332



НИКОЛАЕВ Константин Сергеевич – ассистент кафедры системного анализа и информационных технологий Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета.

Основные направления научных исследований: обработка естественного языка, искусственный интеллект.

Konstantin Sergeevich NIKOLAEV – Assistant of the Department of System Analysis and Information Technologies of the Institute of Computational Mathematics and Information Technologies of Kazan Federal University.

Major fields of scientific research are Natural Language processing, artificial intelligence.

email: konnikolaeff@yandex.ru

ORCID: 0000-0003-3204-238X

Материал поступил в редакцию 25 февраля 2023 года

Переработанная версия – 16 мая 2023 года