

УДК 004

ПЕРСИСТЕНТНЫЕ ГОМОЛОГИИ: ПРИМЕНЕНИЕ К МОНИТОРИНГУ ОБРАЗОВАНИЯ ТРЕЩИН ПРИ ГИДРОРАЗРЫВЕ ПЛАСТА

К. Ю. Ерофеев¹, М. Т. Зиятдинов², Е. В. Мокшин³

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

¹krllero@gmail.com, ²gltronred@gmail.com, ³zhen-moks@yandex.ru

Аннотация

Персистентные гомологии – это инструмент топологического анализа данных, отражающий то, как изменяется топологическая структура данных с изменением масштаба их восприятия. В статье дано применение персистентных гомологий к мониторингу образования трещин при гидроразрыве пласта, что позволяет исследователю естественным образом учитывать априорную информацию.

Ключевые слова: топологический анализ данных, персистентные гомологии, гидроразрыв пласта, микросейсмические события.

ВВЕДЕНИЕ

Теория персистентных гомологий начала развиваться в конце прошлого тысячелетия независимо тремя группами ученых: Патрицио Фроссини и Массимо Ферри из итальянской Болоньи, Ванессой Робинс из Колорадо в ее докторской диссертации и в биогеометрических исследованиях Герберта Эдельсбурнера из Северной Каролины [1]. Группа, в которую входили Патрицио Фроссини и Массимо Ферри, изучала нульмерные гомологии как теорию размера, эти исследования были мотивированы изучением естественных псевдо-расстояний между двумя функциями на гомеоморфных топологических пространствах.

Идея альфа-формы, предложенная в 1983 году [2], лежала в основе докторской диссертации Ванессы Робинс, применившей ее к изучению фракталов [3]. В 2002 году был разработан и представлен алгоритм вычисления персистентных гомологий [4].

Давид Кохен-Штайнер, Герберт Эдельсбурнер и Джон Харер в 2007 году [5]

показали стабильность персистентных гомологий в том смысле, что небольшие изменения в данных ведут к небольшим изменениям баркодов соответствующих гомологий.

Иногда, чтобы отобразить представляющие интерес признаки в элементы гомологий, в существующее пространство данных добавляется дополнительное построение. Так, в [6] Ксяосинь Ю рассматривает предложения текста как точки в евклидовом пространстве, основываясь на модели «мешок слов», и обращает внимание на то, что близкие по смыслу предложения находятся в данном представлении ближе друг к другу. Ксяосинь Ю поставил задачу получить с помощью первых гомологий информацию о количестве отсылок в тексте. Чтобы отобразить отсылки в тексте в элементы первых гомологий, он достраивает комплекс, соединяя соседние по расположению в тексте предложения 1-симплексами. Важно заметить, что такая процедура не только отображает в элементы первых гомологий все отсылки в тексте, но и делает элементы первых гомологий, соответствующие отсылкам в тексте, тем устойчивее, чем дальше расположены друг от друга отсылка и источник. Описанный метод был протестирован Ксяосинем Ю на эссе, что были написаны детьми и подростками. Предположение, что эссе подростков имеет более сложный смысловой узор, значит, и большее количество отсылок, подтвердилось полностью, так что устойчивость элементов первых гомологий фильтраций, построенных по текстам подростков, значительно превосходила устойчивость элементов первых гомологий в текстах детей.

В настоящее время персистентные гомологии как инструмент топологического анализа данных применяются к широкому спектру задач, среди которых: изучение зрительной коры головного мозга [7], беспроводных сетей [8], сегментирования изображений [9], космологий [10], предвыборных махинаций [11].

В настоящей статье описано применение персистентных гомологий к задаче локации микросейсмических событий. В первом разделе изложены цели и проблемы микросейсмического мониторинга, во втором разделе представлены основные понятия теории персистентных гомологий и их интерпретация. В третьем разделе описаны применение персистентных гомологий к задачам микросейсмического мониторинга, важную часть которого составляет введение метрики на пространстве микросейсмических событий, которая обсуждается в раз-

деле 4. Результаты соответствующих вычислительных экспериментов приведены в разделе 5.

1. МИКРОСЕЙСМИЧЕСКИЙ МОНИТОРИНГ

В последнее десятилетие наблюдается увеличение интереса к микросейсмическому мониторингу со стороны нефтегазовой промышленности.

В процессе разработки месторождения геологическая среда подвергается различного рода воздействиям, которые изменяют напряженно-деформированное состояние породы. Одной из наиболее важных подобных процедур является гидравлический разрыв пласта (ГРП).

ГРП – это один из методов повышения продуктивности нефтяного или газового месторождения. Такая процедура заключается в нагнетании жидкости и увеличении давления в скважине на необходимой глубине резервуара с целью создания высоко-проводимой системы трещин, по которым осуществляется приток углеводорода к стволу скважины.

Процедура разрыва пласта является технологически сложной операцией. В процессе ее проведения нужно понимать и контролировать в том числе реакцию пласта на закачку флюида и размещение пропанта внутри образовавшихся трещин. Результаты проведения этой процедуры являются опорой для планирования дальнейших шагов по эксплуатации месторождения.

Разрушения или скольжение породы, происходящие внутри пласта, являются источником акустической эмиссии, представляющей собой микросейсмические события. Микросейсмическая активность содержит информацию о происходящих сдвигах, раскрытиях и закрытиях трещин.

Наиболее эффективной технологией контроля качества ГРП является микросейсмический мониторинг [12–15]. Он осуществляется с помощью сейсмоприёмников, расположенных в соседней скважине или на дневной поверхности, и сопровождает всю процедуру, записывая приходящие колебания. Регистрация микросейсмических возмущений, возникающих при образовании и росте систем трещин, позволяет определить их свойства и рассчитать место и время их зарождения [16].

Микросейсмическое событие характеризуется тензором сейсмического момента (ТСМ) [17]. ТСМ описывается системой из девяти пар сил и отражает

деформацию среды, происходящую в месте очага возмущения (рис. 1).

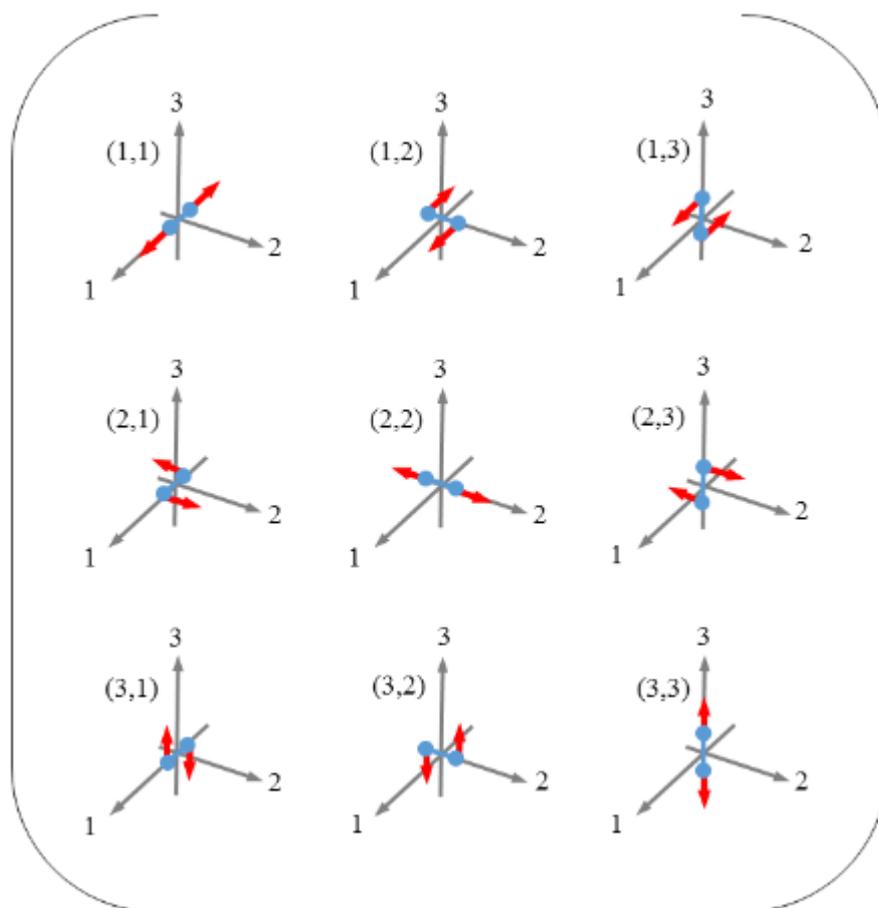


Рисунок 1. Тензор микросейсмического момента.

Тензор сейсмического момента является симметричной и вещественной матрицей, которую всегда можно привести к диагональному виду. Таким образом, конкретное микросейсмическое событие описывается тремя собственными значениями и собственными векторами. Собственное значение отражает амплитуду события по направлению соответствующего ему собственного вектора.

Результатом микросейсмического мониторинга является микросейсмическая активность, накопленная за время проведения ГРП. Однако далеко не все восстановленные события имеют прямое отношение к росту трещин.

Изменение давления в пласте приводит к линейной диффузии порового давления и вызывает микросейсмические события, которые непосредственно не связаны с образованием трещин [13]. Кроме того, сейсмические приемники, кроме полезной информации, регистрируют также приходящие шумы. Шумы

имеют разную причину возникновения, в том числе исходят от работающего на поверхности оборудования, осуществляющего процесс ГРП. Наличие шумов вносит искажения в получаемый результат.

Таким образом, интерпретация полученных событий является важной и сложной процедурой, требующей учета различных факторов. На инженера, который проводит интерпретацию, ложится ответственность за правильную классификацию и отбраковку ложных событий. Его задача – увидеть в сложной картине из множества событий, каждое из которых описывается шестью компонентным тензором, взаимосвязанные физические процессы.

Среди трудностей, с которыми сталкивается инженер, оценивая картину микросейсмических событий, следует отметить следующие.

Многомерность данных: для каждого из микросейсмических событий известны 3 его пространственные координаты, 3 собственных значения, определяющие тип микросейсмического события, и как минимум один главный собственный вектор, определяющий направление.

Направление развития трещины при микросейсмических событиях разного типа имеет разную зависимость от главного собственного вектора тензора микросейсмического момента.

Типы микросейсмических событий не определяются точно, вместо этого мы имеем события, которые с разной степенью уверенности можно отнести к нескольким типам. Таким образом, исследователю необходимо с разной вероятностью учитывать принадлежность события к разным типам и интерпретировать это как свидетельство развития трещины в разных направлениях.

Часто необходимо учитывать *априорную информацию* о направлениях развития трещин или особенности метода микросейсмического мониторинга. Некачественное выполнение данного этапа сильно обесценивает вложенные затраты и труд, поэтому остро встает вопрос о необходимости создания автоматического инструмента, который присваивал бы двум областям микросейсмических событий числовую характеристику, которая может быть интерпретирована как правдоподобность существования между ними трещины, и одновременно с этим допускал бы естественный учет априорной информации.

2. ПЕРСИСТЕНТНЫЕ ГОМОЛОГИИ

Персистентные гомологии передают информацию об узоре пустот в данных путем идентификации разнообразия классов эквивалентности замкнутых путей в данных, рассмотренных с разным масштабом. К одному классу эквивалентности принадлежат замкнутые пути, которые могут быть переведены друг в друга непрерывным отображением. Такие замкнутые пути называют гомотопными. Ниже приведены основные определения, взятые из [6].

Определение 1. Симплициальный комплекс K – это конечное множество симплексов, такое, что $\sigma \in K, r \subset \sigma \Rightarrow r \in K$, и если $\sigma, \tau \in K$, то $\sigma \cap \tau$ или пусто, или является гранью σ и τ одновременно.

Определение 2. k -ая группа цепей C_k комплекса K – это свободная абелева группа на множестве ориентированных k -симплексов, принадлежащих этому комплексу, где выполняется $[\sigma] = -[\tau]$, если $\sigma = \tau$ и при этом $[\sigma]$ и $[\tau]$ противоположно ориентированы. Ее элементы – k -цепи, $c \in C_k, c = \sum_i n_i [\sigma_i]$, где $\sigma_i \in K, n_i \in \mathbb{Z}$.

Определение 3. Оператор взятия границы – это гомоморфизм групп $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$, действие которого на элементы C_k определяется линейно через его действие на k -симплексы $\sigma_k = [v_0, v_1, \dots, v_k]$:

$$\partial_k \sigma = \sum_i (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k].$$

Через \hat{v}_i обозначена вершина, которая исключается из симплекса.

Определение 4. Операторы взятия границ соединяют группы цепей в цепные комплексы

$$C_*: \dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_{k+1} \xrightarrow{\partial_k} C_k \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots .$$

Определение 5. С помощью оператора взятия границы определяются также две важные подгруппы k -х групп цепей: группа циклов $Z_k = \ker \partial_k$ и группа границ $B_k = \text{im } \partial_{k+1}$.

Определение 6. k -ая группа гомологий – это фактор k -ой группы цепей по k -ой группе границ: $H_k = Z_k / B_k$.

Такому определению можно дать следующую интерпретацию: Z_k – это множество всех k -цепей, которые оператор взятия границы переводит в нуль, т. е. множество всех замкнутых контуров, а B_k – это множество всех тех k -цепей, ко-

торые являются границами $k + 1$ -цепей. Тогда k -ая группа гомологий $H_k = Z_k/B_k$ – это группа всех замкнутых контуров, факторизованная по тем замкнутым контурам, которые являются границами некоторой $k + 1$ -цепи, т. е. окружают некоторый существующий в $k + 1$ -ом измерении кусок пространства, значит, не образующий пустоту. Эта интерпретация объясняет способность гомологий отображать структуру пустот топологического пространства.

Определение 7. Фильтрацией комплекса K называется последовательность вложенных друг в друга комплексов $\emptyset = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m = K$. Для общности мы считаем $K_i = K_m$ для всех $i \geq m$. K в таком случае называется фильтрованным комплексом.

Теперь для преобразования наших данных в фильтрацию мы можем интерпретировать данные как точки в пространстве \mathbb{R}^n , а затем можем построить комплекс Чеха или комплекс Рипса с целью захватить топологические инварианты пространства.

Определение 8. Комплекс Чеха $\check{C}_\varepsilon(X)$ для $\varepsilon > 0$ и облака точек X определяется следующим образом: точки из X образуют множество точек комплекса, т. е. множество нульмерных симплексов, а подмножество $\sigma \subset X$ принадлежит комплексу $\check{C}_\varepsilon(X)$, если множество шаров с центром в точках из σ и радиусом ε имеют непустое пересечение.

Определение 9. Комплекс Рипса $R_\varepsilon(X)$ для $\varepsilon > 0$ и облака точек X строится следующим образом: некоторое подмножество вершин $\sigma \subset X = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ составляет симплекс в $R_\varepsilon(X)$, если все $x \in \sigma$ попарно близки, т. е.

$$d(x_i, x_j) < \varepsilon, \forall x_i, x_j \in \sigma.$$

Построение комплекса Чеха – вычислительно более дорогая операция, нежели построение комплекса Рипса, однако комплекс Чеха всегда гомотопически эквивалентен топологическому пространству, полученному как объединение шаров, в то время как для комплекса Рипса это не всегда так [14].

Как для комплекса Чеха, так и для комплекса Рипса мы можем сопоставить набору точек в пространстве естественную последовательность вложенных друг в друга комплексов, так как в обоих случаях выполняется $\varepsilon < \gamma \implies R_\varepsilon(X) \subseteq R_\gamma(X)$, следовательно, любая возрастающая последовательность неотрицатель-

ных ε даст нам фильтрацию. Теперь элемент гомологий, появившийся на элементе фильтрации i и закончивший свое существование на элементе фильтрации p , определяется следующим образом:

$$H_k^{i,p} = Z_k^i / (B_k^{i+p} \cap Z_k^i).$$

Графически гомологии изображаются с помощью специальных графиков, называемых баркодами. По оси Y на баркодах отображается порядковый номер элемента гомологий, а координаты начала и конца баркода по оси X соответствуют моменту появления i и исчезновения $i + p$ соответствующего элемента гомологий.

Так, например, для набора точек, изображенного на рис. 2, с фильтрацией, построенной с помощью комплекса Рипса и евклидовой метрики, баркод, отображающий значимые элементы первых гомологий, будет выглядеть так, как показано на рис. 3. Здесь наибольший по ширине баркод соответствует вкладу в первые гомологии большого круга, второй по ширине – вкладу маленького, оставшиеся баркоды с маленькой продолжительностью жизни соответствуют шуму.



Рисунок 2. Точки, образующие два круга: простейший пример для иллюстрации работы персистентных гомологий.



Рисунок 3. Баркод персистентных гомологий для данных, изображенных на рис. 2.

3. ПРИМЕНЕНИЕ К МОНИТОРИНГУ ТРЕЩИН ГРП

Одной из главных трудностей в ручной обработке данных микросейсмического мониторинга является их многомерность. Так, микросейсмические события как правило имеют три пространственных измерения и шесть измерений, составленных из координат главного собственного вектора и собственных чисел тензора микросейсмического момента. В данном разделе для более удобной и наглядной визуализации данных будут рассмотрены микросейсмические события на плоскости, однако представленные результаты естественным образом переносятся на случай большего количества размерностей.

Чтобы отыскать трещины в наборе микросейсмических событий, мы выделяем две области, наличие трещины между которыми будем исследовать. По окончании работы представленного алгоритма мы получим число, которое можно будет интерпретировать как правдоподобность наличия трещины между выделенными областями.

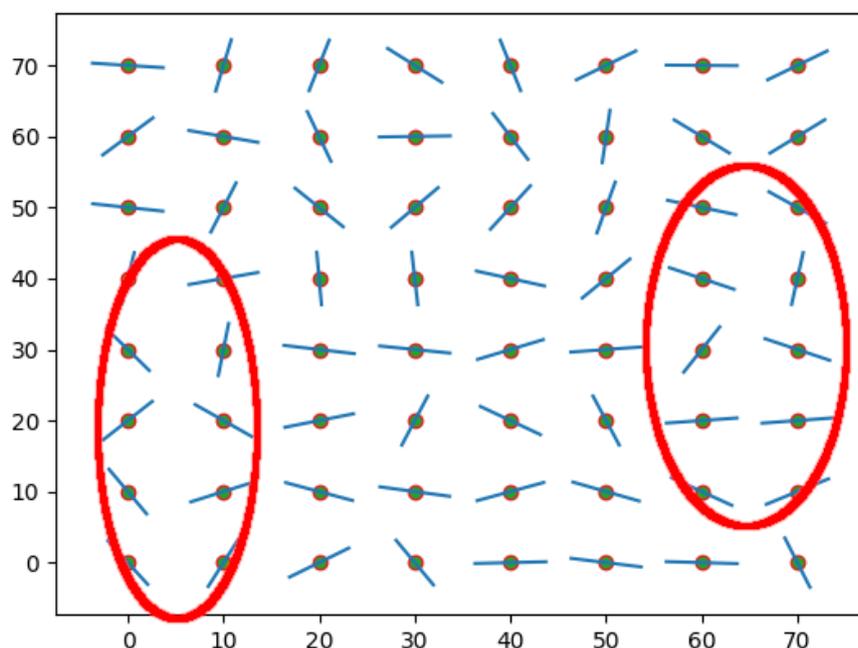


Рисунок 4. Микросейсмические события с двумя выделенными областями интереса.

Например, на графике (рис. 4) положение отрезка в пространстве характеризуют положение тензора микросейсмического момента в пространстве, а его направление – направление наибольшего собственного вектора тензора. Красными эллипсами выделена область данных, между которыми будет производиться поиск трещины. Тип микросейсмического события на графике не отображается.

Чтобы построить по набору микросейсмических событий фильтрацию, мы вводим на множестве микросейсмических событий метрику, учитывающую не только пространственную близость микросейсмических событий друг к другу, но и их тип и направление их собственных векторов так, чтобы близкие в этой метрике события наиболее вероятно составляли участок трещины.

Также мы добавляем к нашим данным точку, которая будет в выбранной нами метрике располагаться близко к двум выделенным множествам точек, после чего трещины, которые проявляются как линии из микросейсмических событий, близко расположенных в метрике, учитывающей собственные вектора тензора микросейсмического момента, будут проявляться как элементы первых го-

мологий. А наибольшая продолжительность жизни элемента первых гомотопий может быть интерпретирована как правдоподобность наличия трещины между двумя выделенными областями данных.

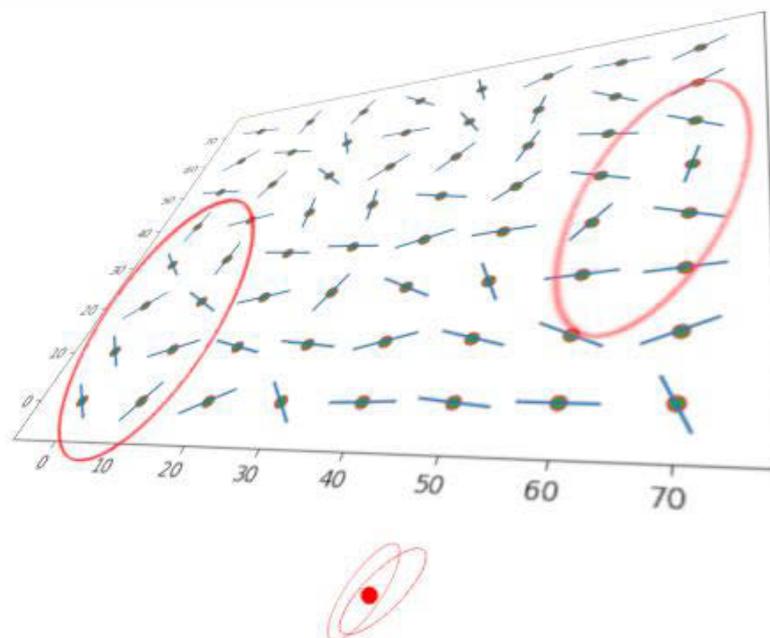


Рисунок 5. Построение, обеспечивающее отображение трещин в элементы гомотопий.

На графике (рис. 5) визуализировано добавление дополнительной точки, которая обеспечит отображение трещин, соединяющих две конкретные выделенные области в элементы первых гомотопий.

Для остальных точек пространства мы строим нашу метрику как сумму метрик: евклидовой метрики на пространстве физического расположения микросейсмических событий и некоторой метрики на пространстве тензоров микросейсмического момента, умноженной на некоторый коэффициент, что без ограничения общности может быть записано как

$$d_M(M_x, M_y) = d_L(L_x, L_y) + h d_E(E_x, E_y),$$

где d_M – метрика на пространстве микросейсмических событий, d_L – евклидова метрика на координатах микросейсмических событий, d_E – метрика на тензорах микросейсмического события.

4. МЕТРИКА НА ТЕНЗОРАХ МИКРОСЕЙСМИЧЕСКОГО СОБЫТИЯ

В первую очередь отметим, что для успешного построения фильтрации используемая функция расстояния необязательно должна быть метрикой в алгебраическом смысле, а именно, необязательным является выполнения правила треугольника, в то время как необходимыми являются положительность и коммутативность метрики.

В процессе построения метрики мы учтем как направление трещины, так и ту степень, с которой то или иное событие свидетельствует об определенном направлении трещины.

При мониторинге ГРП исследователя, как правило, интересуют только два вида событий: Tensile Crack и Double-Couple. Double-Couple характеризует собой сдвиг, такие события возникают первыми, когда нагнетаемое давление еще недостаточно, чтобы преодолеть сдавливающие напряжения. Когда давление достигает значения напряжения, возникает трещина отрыва, такие события относят к типу Tensile Crack. На финальном этапе ГРП давление стравливают, что приводит к закрытию некоторых трещин, эти события тоже описываются Tensile Crack, однако направление главного момента будет с противоположным знаком.

Наличие двух видов интересующих нас событий дает два вида зависимости направления развития трещины от наибольшего собственного вектора тензора микросейсмического момента, что отображено на иллюстрациях ниже.

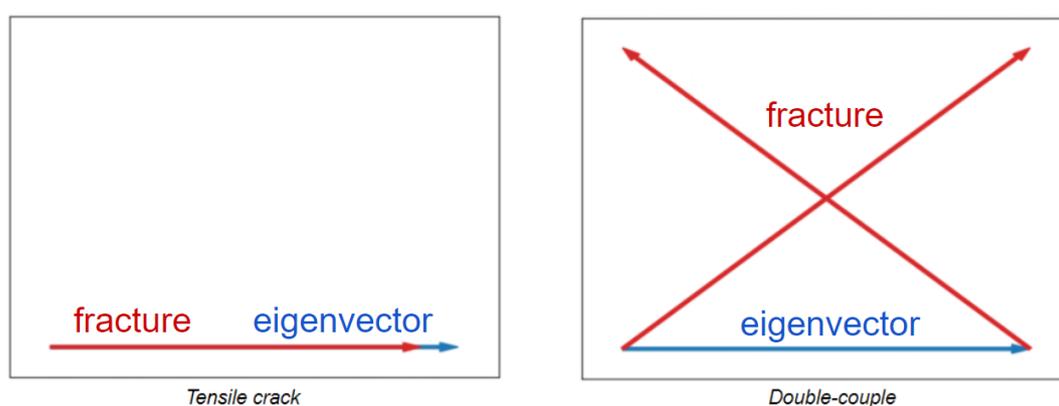


Рисунок 6. Микросейсмические события.

Также мы не можем с полной уверенностью отнести событие к конкрет-

ному типу, на практике мы чаще понимаем, что конкретное событие может быть интерпретировано с разной степенью уверенности как событие разных типов.

Чтобы учесть все возможные интерпретации, расстояние между двумя тензорами микросейсмического момента определяется как минимальное расстояние по всем интересующим нас интерпретациям:

$$d_E(M_x, M_y) = \min d_t(M_x, M_y), t \in [DC, TC - DC, DC - TC, TC]. \quad (1)$$

Через d_{DC} мы обозначили расстояние, рассчитанное, исходя из интерпретации обоих событий как Double-Couple, d_{TC-DC} – исходя из интерпретации события M_x как Tensile Crack и события M_y – как Double-Couple и т. д. Рассмотрим вопрос о присвоении значения параметру h из (1). Ниже представлен способ эвристической оценки значения параметра h . Рассмотрим следующий набор микросейсмических событий:

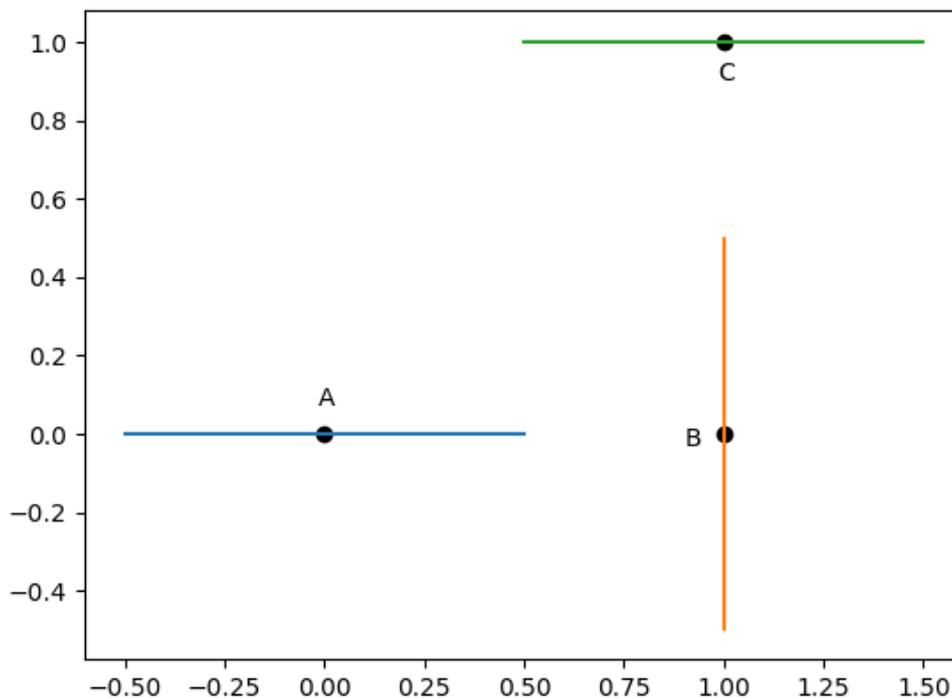


Рисунок 7. Иллюстрация значения метрики.

Здесь микросейсмические события расположены в вершинах квадрата, направление развития трещины, предсказанное событием В, перпендикулярно

направлениям, предсказанным событиями А и С. Исходя из опыта микросейсмических исследований, можно заключить, что $d(A, B) > d(A, C)$, таким образом мы получаем

$$d_E(A, B) = \sqrt{2},$$

$$d_L(A, C) - d_L(A, B) = \sqrt{2} - 1,$$

из чего следует оценка снизу:

$$h \geq d_L(A, B) \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},$$

где $d_L(A, B)$ – длина шага сетки.

Важно отметить, что манипуляции с метрикой позволяют нам вводить априорную информацию: так, если исследователь не ожидает в своем наборе микросейсмических событий типа DC, то возможность интерпретировать события как событие типа DC можно исключить из описанной выше метрики. Также метрика может быть сжата вдоль оси, по которой наличие трещины более вероятно.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для простейшего подтверждения работоспособности предложенного алгоритма были сгенерированы четыре набора событий типа Tensile Crack, с разной степенью очевидности наличия трещины между выделенными областями. Рассмотрим, как ведут себя элементы первых гомологий.

Идеальная трещина отображается в длинный выступающий элемент первых гомологий (рис. 8).

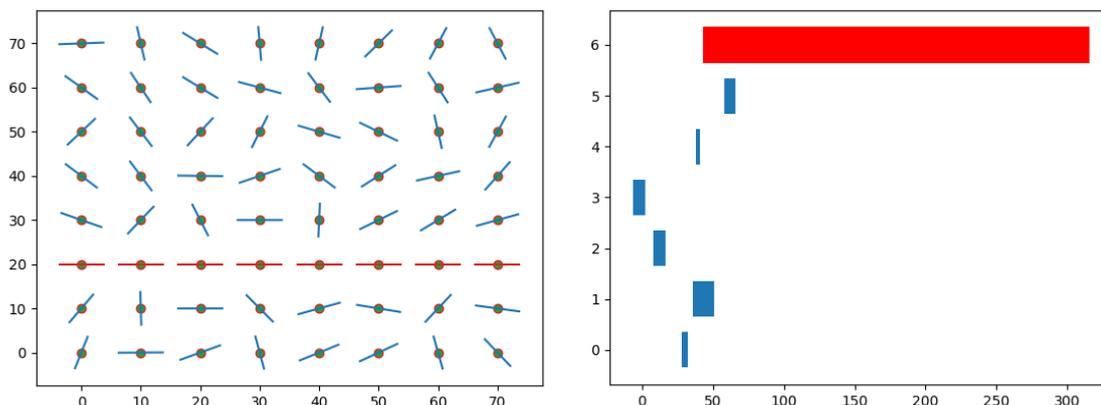


Рисунок 8. Эксперимент без шума.

Трещина с нормальным шумом, добавленным в направления собственных векторов, с дисперсией в 10% от перпендикулярного направления вектора примерно в два раза уменьшает длину жизни элемента первых гомологий (рис. 9).

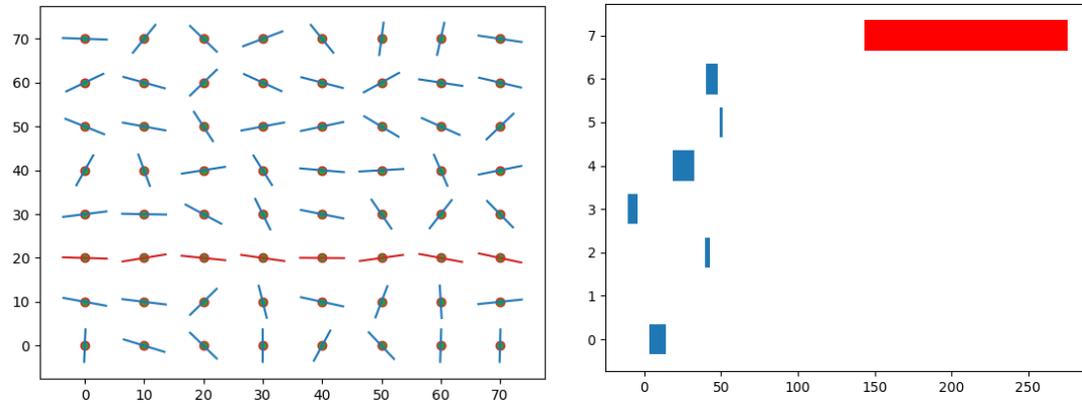


Рисунок 9. Эксперимент с низким уровнем шума.

Трещина с нормальным шумом с дисперсией в 60% еще в два раза уменьшает длину жизни наибольшего элемента первых гомологий, хотя и оставляет его различимым (рис. 10).

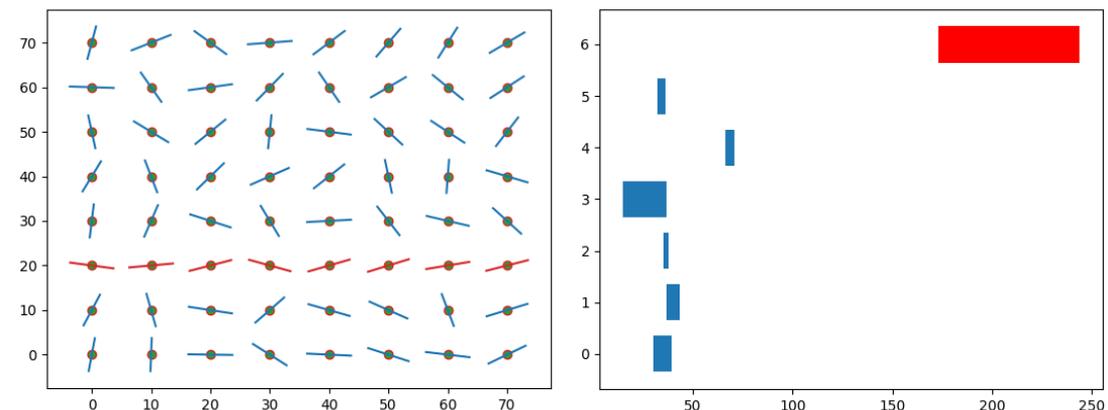


Рисунок 10. Эксперимент со средним уровнем шума.

Набор микросейсмических событий, не содержащий трещины, не образует значимых элементов первых гомологий (рис. 11).

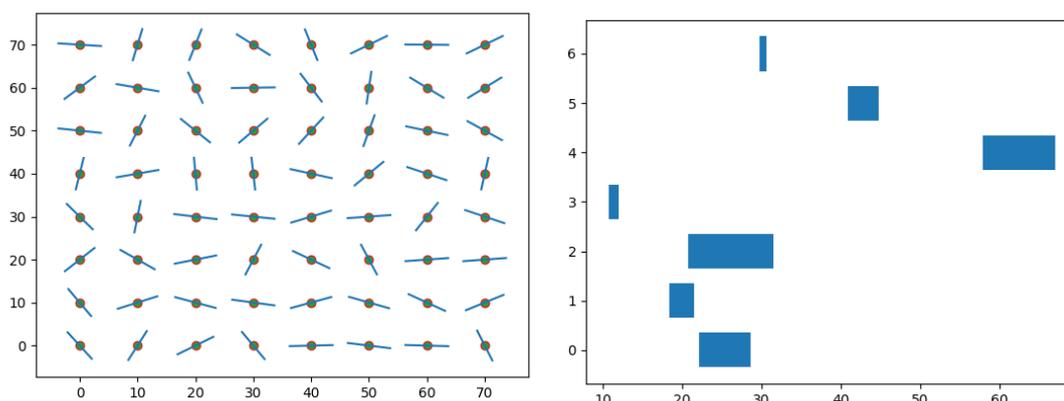


Рисунок 11. Эксперимент с высоким уровнем шума.

В результате подсчета длин продолжительности жизни элементов первых гомотопий мы можем наблюдать, что продолжительность жизни наиболее долгоживущего элемента из элементов первых гомотопий тем меньше, чем менее выражено наличие трещины в данных. Таким образом мы получили числовую характеристику, монотонно возрастающую с увеличением правдоподобности наличия трещины в данных.

ВЫВОДЫ

В работе дано сравнительно простое описание персистентных гомотопий – инструмента топологического анализа данных. Также представлено применение персистентных гомотопий, позволяющее в автоматическом режиме исследовать области пространства микросейсмических событий на наличие трещины, освобождая исследователя от необходимости глазами просматривать многомерные данные, допускающие большое количество интерпретаций, а также дающее возможность учитывать неточную и вероятностную природу детектирования микросейсмических событий.

Также представленный алгоритм предоставляет возможность естественного учета априорной информации и личных взглядов исследователя. Манипулируя метрикой, исследователь способен не только указать наиболее вероятное направление развития трещин, но и определить типы и параметры событий, которые он ожидает или не ожидает увидеть в результате.

Применение персистентных гомотопий к задачам микросейсмического мониторинга раскрыто в статье не полностью, в дополнительных исследованиях

нуждаются свойства метрик на пространствах микросейсмических событий и способы ввода априорной информации. Также представляет интерес интерпретация таких признаков баркодов одномерных гомологий, как время начала жизни наиболее долгоживущего элемента первых гомологий, которое может быть интерпретировано как наибольшее расстояния «разрыва» в правдоподобности узора микросейсмических событий, который интерпретируется как трещина или время окончания жизни наиболее долгоживущего элемента первых гомологий, которое, возможно, коррелирует с длиной трещины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Кабинета министров Республики Татарстан в рамках проекта 18-47-160010.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Herbert Edelsbrunner, John Harer. Persistent Homology — a Survey // Contemporary Mathematics. 2007. P. 103–120.*
2. *Herbert Edelsbrunner, Donald Kirkpatrick, Rainmund Siedel. On the shape of a set of points in the plane // IEEE Trans. Inform. Theory. 1983. P. 103–120.*
3. *Vanessa Robins. Toward computing homology from finite approximations // Topology Proceedings. 1999. V. 24, No. 1. P. 503–532.*
4. *Herbert Edelsbrunner, David Letscher, Afra Zomorodian. Topological Persistence and Simplification // Discrete Comput. Geom. 2002. V. 28. P. 511–533. DOI: 10.1007/s00454-002-2885-2.*
5. *David Cohen-Steiner, Herbert Edelsbrunner, John Harer. Stability of Persistence Diagrams // Discrete Comput. Geom. 2007. V. 37. P. 103–120. DOI: 10.1007/s00454-006-1276-5.*
6. *Xiaojin Zhu. Persistent Homology: An Introduction and a New Text Representation for Natural Language // IJCAI International Joint Conference on Artificial Intelligence. 2013. P. 1953–1959.*
7. *Gurjeet Singh, Facundo Memoli, Tigran Ishkhanov, Guillermo Sapiro, Gunnar Carlsson, Dario L. Ringach. Topological analysis of population activity in visual cortex // Journal of Vision. 2008.V. 8, No. 11. DOI: 10.1167/8.8.11.*

8. *Vin de Silva, Robert Ghrist.* Homological sensor networks // Notices of the American Mathematical Society. 2007. V. 54, No. 1. P. 10–17.
 9. *Frederic Chazal, Steve Y. Oudot, Primoz Skraba, Leonidas J. Guibas.* Persistence-Based Clustering in Riemannian Manifolds // Journal of the ACM. 2013. V. 60, No. 6. Article No 14. DOI: 10.1145/1998196.1998212.
 10. *Sven Heydenreich, Benjamin Bruck, Joachim Harnois-Deraps.* Persistent homology in cosmic shear: constraining parameters with topological data analysis // arXiv:2007.13724.
 11. *Moon Duchin, Tom Needham, Thomas Weighill.* The (homological) persistence of gerrymandering // arXiv:2007.02390.
 12. *James Rutledge, Phillips W.S., House L.S., Zinno R.J.* Microseismic mapping of a Cotton Valley hydraulic fracture using Decimated downhole arrays // SEG Technical Program Expanded Abstracts. 1998. P. 338–341. DOI: 10.1190/1.1820422.
 13. *Serge A. Shapiro.* Fluid-Induced Seismicity. 2015. 289 p.
 14. *T.I. Urbancic, V. Shumila, J.T. Rutledge, R.J. Zinn.* Determining Hydraulic Fracture Behaviour Using Microseismicity // Proceedings of 37th U.S. Rock Mech. Symp. 1999. P. 991–996.
 15. *T.I. Urbancic, S.C. Maxwell.* Source Parameters of Hydraulic Fracture Induced Microseismicity // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 2002. DOI: 10.2118/77439-MS.
 16. *Tatjana Yanovskaya.* Основы сейсмологии. Изд-во С.-Пб. ун-та. 2008. 222 с.
 17. *Keiiti Aki, Paul G. Richards.* Quantitative Seismology // San Francisco, CA: Freeman, 1980. 49 p.
-

PERSISTENT HOMOLOGY: APPLICATION TO MONITORING HYDRAULIC FRACTURING

K. Y. Erofeev¹, M. T. Ziatdinov², E. V. Mokshin³

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan

¹krllerof@gmail.com, ²gltronred@gmail.com, ³zhen-moks@yandex.ru

Abstract

Persistent homology is a topological data analysis tool which is reflecting changes in topological structure of data along its scale. Application of persistent homology to monitoring hydraulic fracturing which is allowing researchers to consider prior information in a natural way is given in the article.

Keywords: *topological data analysis, persistent homology, hydraulic fracturing, microseismic events.*

REFERENCES

1. *Herbert Edelsbrunner, John Harer. Persistent Homology — a Survey // Contemporary Mathematics. 2007. P. 103–120.*
2. *Herbert Edelsbrunner, Donald Kirkpatrick, Rainmund Siedel. On the shape of a set of points in the plane // IEEE Trans. Inform. Theory. 1983. P. 103–120.*
3. *Vanessa Robins. Toward computing homology from finite approximations // Topology Proceedings. 1999. V. 24, No. 1. P. 503–532.*
4. *Herbert Edelsbrunner, David Letscher, Afra Zomorodian. Topological Persistence and Simplification // Discrete Comput. Geom. 2002. V. 28. P. 511–533. DOI: 10.1007/s00454-002-2885-2.*
5. *David Cohen-Steiner, Herbert Edelsbrunner, John Harer. Stability of Persistence Diagrams // Discrete Comput. Geom. 2007. V. 37. P. 103–120. DOI: 10.1007/s00454-006-1276-5.*
6. *Xiaojin Zhu. Persistent Homology: An Introduction and a New Text Representation for Natural Language // IJCAI International Joint Conference on Artificial Intelligence. 2013. P. 1953–1959.*

7. *Gurjeet Singh, Facundo Memoli, Tigran Ishkhanov, Guillermo Sapiro, Gunnar Carlsson, Dario L. Ringach.* Topological analysis of population activity in visual cortex // Journal of Vision. 2008. V. 8, No. 11. DOI: 10.1167/8.8.11.
8. *Vin de Silva, Robert Ghrist.* Homological sensor networks // Notices of the American Mathematical Society. 2007. V. 54, No. 1. P. 10–17.
9. *Frederic Chazal, Steve Y. Oudot, Primoz Skraba, Leonidas J. Guibas.* Persistence-Based Clustering in Riemannian Manifolds // Journal of the ACM. 2013. V. 60, No. 6. Article No 14. DOI: 10.1145/1998196.1998212.
10. *Sven Heydenreich, Benjamin Bruck, Joachim Harnois-Deraps.* Persistent homology in cosmic shear: constraining parameters with topological data analysis // arXiv:2007.13724.
11. *Moon Duchin, Tom Needham, Thomas Weighill.* The (homological) persistence of gerrymandering // arXiv:2007.02390.
12. *James Rutledge, Phillips W.S., House L.S., Zinno R.J.* Microseismic mapping of a Cotton Valley hydraulic fracture using Decimated downhole arrays // SEG Technical Program Expanded Abstracts. 1998. P. 338–341. DOI: 10.1190/1.1820422.
13. *Serge A. Shapiro.* Fluid-Induced Seismicity. 2015. 289 p.
14. *T.I. Urbancic, V. Shumila, J.T. Rutledge, R.J. Zinn.* Determining Hydraulic Fracture Behaviour Using Microseismicity // Proceedings of 37th U.S. Rock Mech. Symp. 1999. P. 991–996.
15. *T.I. Urbancic, S.C. Maxwell.* Source Parameters of Hydraulic Fracture Induced Microseismicity // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 2002. DOI: 10.2118/77439-MS.
16. *Tatjana Yanovskaya.* Основы сейсмологии. Изд-во С.-Пб. ун-та. 2008. 222 с.
17. *Keiiti Aki, Paul G. Richards.* Quantitative Seismology // San Francisco, CA: Freeman, 1980. 49 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



ЕРОФЕЕВ Кирилл Юрьевич – аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань.

Kirill Yurevich EROFEEV – *postgraduate*, Kazan (Volga region) Federal University, Kazan.

Email: krllerof@gmail.com



ЗИЯТДИНОВ Мансур Тагирович – научный сотрудник НИЛ «Квантовые методы обработки данных», Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань.

Mansur Tagirovich ZIATDINOV – *researcher*, "Quantum Information Science" Laboratory, Kazan (Volga region) Federal university, Kazan.

Email: gltronred@gmail.com



МОКШИН Евгений Владимирович – ведущий инженер исследователь, ООО Градиент-технологджи, г. Казань.

Evgenii Vladimirovich MOKSHIN – *lead research engineer*, Gradient Technology, Kazan.

Email: zhen-moks@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 5 ноября 2020 года