

УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ОПЕРАТОРОМ СМЕШАННОГО ТИПА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

М. П. Галанин^{1, 2}, Д. Л. Сорокин^{1, 2}

¹ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва;

² Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, г. Москва

galan@keldysh.ru, sorokin.dmitr@yandex.ru

Аннотация

Проанализированы методы решения задач, базирующиеся на основной интегральной формуле Грина. Предложены новые методы решения задачи с оператором смешанного типа в неограниченной области. На основе этих методов созданы программы для решения задач с оператором смешанного типа. Приведены результаты вычислительных экспериментов, показывающие корректность применения методов.

Ключевые слова: неограниченная область, оператор смешанного типа, электродинамические ускорители рельсового типа, система уравнений Максвелла в квазистационарном приближении

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании физических явлений часто возникает необходимость проводить моделирование в неограниченной области, например, при моделировании электростатического поля зарядов, решении задачи теплопроводности и т. п. В случае, когда явление можно описать с помощью простейших линейных эллиптических операторов, проблема решена и описана, например, в [1, 2]. Постановка неотражающих граничных условий для волновых уравнений подробно рассмотрена в [3]. Однако для более широкого класса задач, для которых оператор задачи может иметь смешанный тип, но вне некоторой финитной области, фундаментальное решение оператора известно и легко вычисляется, вышеупомянутые методы неприменимы.

В частности, задачи с операторами смешанного типа возникают при моделировании электромагнитного поля в электродинамических ускорителях рельсового типа. Процесс протекания тока в проводниках в этом случае может быть описан параболическим уравнением, а электромагнитное поле в диэлектрике — эллиптическим [4, 5].

1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Для решения задачи предлагается три метода решения: метод расширения области, метод задания интегральных граничных условий, трёхэтапный метод [6].

При решении задач с помощью сеточных численных методов точность решения определяется шагом сетки и точностью задания граничных условий. Если при решении задачи в конечной области на границе поставить те же граничные условия, что и на бесконечности в исходной задаче, то ошибка, определяемая заданием граничного условия, будет, как правило, уменьшаться при увеличении размера расчётной области. В связи с этим для решения задач в неограниченной области можно использовать метод расширения области, т. е. можно найти такой размер расчётной области, при котором влияние искусственной границы будет меньше, чем применение численного метода.

Метод расширения расчётной области прост в реализации, но имеет высокую вычислительную сложность [6]. Альтернативными методами являются методы, основанные на использовании формул Грина.

Первым из них является метод задания интегрального граничного условия [6]. Он основан на том, что вне некоторой финитной области действует оператор с известным фундаментальным решением и тривиальной правой частью, тогда решение на границе расчётной области определяется с помощью основной интегральной формулы Грина. Таким образом, решение задачи с помощью метода задания интегральных граничных условий требует решения системы уравнений с заполненными строками, соответствующими границе.

В [6] построен трёхэтапный метод решения. При использовании трёхэтапного метода необходимо решать две системы, но с разреженными строками, относящимися к граничным условиям. Результаты расчётов показывают, что при решении задач, сводящихся к решению линейных уравнений с сильно заполнен-

ными матрицами, метод неэффективен, однако для задач с разреженной матрицей системы трёхэтапный метод позволяет получить результат существенно быстрее, чем метод задания интегрального граничного условия.

2. МОДИФИКАЦИЯ ТРЁХЭТАПНОГО МЕТОДА, ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

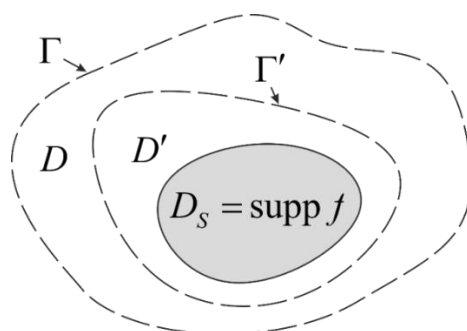


Рис. 1. Структура расчётной области

Рассмотрим подробнее трёхэтапный алгоритм [6] на примере решения задачи с оператором смешанного типа:

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f, & \mathbf{r} \in D_s, \\ \Delta u = 0, & \mathbf{r} \in \Omega^2 \setminus D_s, \end{cases} \quad (1)$$

где ∂D_s – граница области D_s (рис. 1).

После применения метода конечных разностей для аппроксимации производной по времени вместо системы (1) необходимо решить задачу:

$$\begin{cases} \Delta \hat{u} - \frac{1}{a^2 \tau} \hat{u} = -\frac{1}{a^2} \hat{f} - \frac{u}{a^2 \tau}, & \mathbf{r} \in D_s, \\ \Delta \hat{u} = 0, & \mathbf{r} \in \Omega^2 \setminus D_s. \end{cases} \quad (2)$$

В последующих записях решаемых задач во временных производных используется аппроксимация (2).

На первом этапе трёхэтапного метода предлагается решать систему с запаздывающими по времени граничными условиями:

$$\begin{cases} v_t - a^2 \Delta \hat{v} = f, & \mathbf{r} \in D_s; \\ \Delta \hat{v} = 0, & \mathbf{r} \in D \setminus D_s, \\ \hat{v}|_{\Gamma} = u|_{\Gamma}, \\ v(t_{i-1}) = u. \end{cases}$$

На втором этапе предполагается, что решение \hat{v} в области D_S незначительно отличается от решения \hat{u} исходной задачи (2), причём отличие связано с ошибкой в задании граничного условия. Исходя из этих соображений и основной интегральной формулы Грина, поставим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta \hat{u} = f, \mathbf{r} \in D_S; \\ \Delta \hat{u} = 0, \mathbf{r} \in D' \setminus D_S, \\ \hat{u}|_{\Gamma'} = \hat{v}_i + \int_{\Gamma} \left(\Phi_P \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \mathbf{n}} - \hat{v}_i \frac{\partial \Phi_P}{\partial \mathbf{n}} \right) dS, \\ u(t_{i-1}) = u. \end{cases}$$

На третьем этапе согласно основной интегральной формуле Грина восстановим значение \hat{u} на границе Γ по значению \hat{u} в области D' :

$$\hat{u}(P) = \int_{\Gamma_S} \left(\Phi_P^L \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} - \hat{u} \frac{\partial \Phi_P^L}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

Главное преимущество трёхэтапного алгоритма заключается в том, что без использования итерационного процесса он позволяет получить результаты высокой точности [6, 7]. Однако наличие второго этапа заведомо создаёт ошибку, которая не устраняется итерационным повторением этапов 1–3 алгоритма и может расти с уменьшением шага интегрирования по времени τ . Для устранения данного недостатка метода предлагается исключить второй этап метода, а первый и третий этапы выполнять несколько раз на каждом временном слое.

Первый этап нового итерационного алгоритма

$$\begin{cases} u_t^k - a^2 \Delta \hat{u}^k = f, \mathbf{r} \in D_S; \\ \Delta \hat{u}^k = 0, \mathbf{r} \in D \setminus D_S, \\ \hat{u}^k|_{\Gamma} = \hat{g}^{k-1}|_{\Gamma}, \\ u(t_{i-1}) = u, k = 1..N. \end{cases}$$

На первой итерации в качестве граничного условия предлагается выбрать запаздывающее граничное условие

$$\hat{g}^0|_{\Gamma} = g|_{\Gamma}.$$

Второй этап алгоритма

$$\hat{g}^k(P) = \int_{\Gamma_S} \left(\Phi_P^L \frac{\partial \hat{u}^k}{\partial \mathbf{n}} - \hat{u}^k \frac{\partial \Phi_P^L}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

3. ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Применим построенный алгоритм к решению следующей задачи:

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f, & r \leq R_0, \\ \Delta u = 0, & r > R_0, \end{cases} \quad (3)$$

$$f(r, \varphi, t) = a^2 \left(\sum_{k=2}^{2+m} (1 - r^2 \lambda_n^2 - k^2) r^{k-2} y_k - C_1 r \lambda_n^2 \right) e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \cos \varphi.$$

Начальное условие (при $r \leq R_0$):

$$u(r, \varphi, 0) = \left(\sum_{k=2}^{m+2} (y_k r^k) + C_1 r - \frac{2c}{\lambda_n R_0^2 (J_0(R_0 \lambda_n) - J_2(R_0 \lambda_n))} J_1(r \lambda_n) \right) \cos \varphi.$$

Здесь m и n – задаваемые параметры; J_j – функция Бесселя j -го порядка

$$(j=0,1,2); \lambda_n = \frac{\mu_n}{R_0}, \text{ где } \mu_n \text{ – } n\text{-й корень уравнения } J_1(\mu_n) = 0; y_k = \frac{(-1)^k C_m^{k-2}}{R_0^{k-2} (k^2 - 1)};$$

$$\gamma = 2; C_1 = -\frac{1}{1+\gamma} \sum_{k=2}^{m+2} ((k\gamma + 1) y_k R_0^{k-1}); C_2 = \sum_{k=2}^{m+2} (y_k R_0^{k+1}) + C_1 R_0^2; c = C_2 \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right).$$

Аналитическое решение имеет вид:

$$u(r, \varphi, t) = \begin{cases} \left(\sum_{k=2}^{m+2} (y_k r^k) + C_1 r + \frac{2c}{\lambda_n R_0^2 (J_0(R_0 \lambda_n) - J_2(R_0 \lambda_n))} J_1(r \lambda_n) \right) e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \cos \varphi, & r \leq R_0; \\ \frac{C_2}{r} e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \cos \varphi, & r > R_0. \end{cases}$$

Зададим $m = 1, n = 2, a = 0.1, R_0 = 1.0$. Решим задачу с помощью нового итерационного метода и трёхэтапного алгоритма. В таблице 1 представлены результаты расчётов. Видим, что все рассмотренные методы приводят к правильному результату.

Таблица 1. Результаты решения тестовой задачи (3) при $R_0 = 1.0, R = 2.0, \tau = 0.001, h = 0.2, T = 0.008$

h^* τ	Число шагов	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$	ρ	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$	ρ	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$	ρ	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$	ρ

	по времени	аналитическое задание ГУ		применение трёхэтапного алгоритма		применение итерационного алгоритма (1 итерация)		применение итерационного алгоритма (2 итерации)	
h τ	8	$3.15114 \cdot 10^{-3}$ (за 0.2108 с.)		$3.90629 \cdot 10^{-3}$ (за 0.489305 с.)		$3.20485 \cdot 10^{-3}$ (за 0.267368 с.)		$3.25578 \cdot 10^{-3}$ (за 0.555425 с.)	
$h/2$ $\tau/4$	32	$4.79565 \cdot 10^{-4}$ (за 1.15328 с.)	2.72	$5.05743 \cdot 10^{-4}$ (за 2.32202 с.)	2.95	$4.50521 \cdot 10^{-4}$ (за 1.36682 с.)	2.83	$4.57497 \cdot 10^{-4}$ (за 2.66011 с.)	2.83
$h/4$ $\tau/16$	128	$6.82737 \cdot 10^{-5}$ (за 8.14104 с.)	2.81	$6.8335 \cdot 10^{-5}$ (за 15.6243 с.)	2.89	$8.60114 \cdot 10^{-5}$ (за 9.01307 с.)	2.39	$7.39768 \cdot 10^{-5}$ (за 17.7113 с.)	2.63
$h/8$ $\tau/64$	512	$1.75524 \cdot 10^{-5}$ (за 114.472 с.)	1.96	$1.75524 \cdot 10^{-5}$ (за 233.351 с.)	1.96	$2.65021 \cdot 10^{-5}$ (за 133.145 с.)	1.69	$2.32554 \cdot 10^{-5}$ (за 260.535 с.)	1.67
$h/16$ $\tau/256$	2048	$4.61259 \cdot 10^{-6}$ (за 2959.46 с.)	1.93						

Здесь $p = \log_2 \left(\left(\|u_h - u\|_C / \|u\|_C \right) \Big|_{h^*} / \left(\|u_h - u\|_C / \|u\|_C \right) \Big|_{h^*/2} \right)$ – величина, характеризующая порядок метода, $(\cdot) \Big|_{h^*}$ – значение, вычисленное на сетке с шагом h^* .

Заметим, что итерационный процесс можно было бы построить и на основе трёхэтапного алгоритма [6]. Однако согласно результатам таблицы 2 это не поможет за меньшее время получить ответ с требуемой точностью, т. к. одна итерация трёхэтапного метода содержит в себе почти в два раза больше вычислительных операций, чем количество операций нового итерационного метода.

Изучая таблицы 1 и 2, можно заметить, что построенные итерационные методы имеют высокую скорость сходимости, пока расстояние от приближения \hat{u}^k до истинного решения велико. В окрестности же решения итерационные процессы не сходятся, что подтверждают результаты численных расчётов (таблица 3).
Таблица 2. Сходимость итерационных методов при решении задачи (3) в случае выбора на каждом шаге в качестве начального приближения нулевого вектора $\tau = 1.5625 \cdot 10^{-5}$, $h = 0.025$, $T_0 = 0.000125$. Ошибка при аналитическом способе задания граничных условий равна $8.45492 \cdot 10^{-6}$

Число итераций	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$ (итерационный метод)	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$ (итерационный процесс на базе трёхэтапного метода)
1	$3.82473 \cdot 10^{-1}$	$1.39064 \cdot 10^{-1}$
2	$1.25412 \cdot 10^{-1}$	$1.65792 \cdot 10^{-2}$

4	$1.34993 \cdot 10^{-2}$	$2.42915 \cdot 10^{-4}$
8	$1.80879 \cdot 10^{-4}$	$1.07342 \cdot 10^{-5}$
16	$2.53095 \cdot 10^{-5}$	$1.07263 \cdot 10^{-5}$
32	$2.53009 \cdot 10^{-5}$	—
64	$2.53275 \cdot 10^{-5}$	—

Таблица 3. Сходимость итерационного метода при $R_0 = 1.0$, $R = 2.0$, $\tau = \frac{0.001}{64}$, $h = \frac{0.2}{8}$, $T = 0.008$

	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$ аналитическое задание ГУ	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$ применение итерационного алгоритма (1 итерация)	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$ применение итерационного алгоритма (2 итерации)	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$ применение итерационного алгоритма (3 итерации)	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$ применение итерационного алгоритма (4 итерации)
Ошибка	$1.75524 \cdot 10^{-5}$	$2.65021 \cdot 10^{-5}$	$2.32554 \cdot 10^{-5}$	$2.45878 \cdot 10^{-5}$	$4.61259 \cdot 10^{-5}$
Время (с.)	114.472	133.145	260.535	359.556	486.5

Одним из способов улучшить скорость сходимости в окрестности решения (таблица 4) является изменение второго этапа итерационного метода, например,

$$\hat{g}^k(P) = \frac{1}{2} \left(\hat{g}^{k-1}(P) + \int_{\Gamma_S} \left(\Phi_P^L \frac{\partial \hat{u}^k}{\partial \mathbf{n}} - \hat{u}^k \frac{\partial \Phi_P^L}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \right).$$

Таблица 4. Сходимость модифицированного итерационного метода при $R_0 = 1.0$, $R = 2.0$, $\tau = \frac{0.001}{64}$, $h = \frac{0.2}{8}$, $T = 0.008$

	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$ аналитическое задание ГУ	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$ применение итерационного алгоритма (1 итерация)	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$ применение итерационного алгоритма (2 итерации)	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$ применение итерационного алгоритма (4 итерации)	$\frac{\ u_h - u\ _C}{\ u\ _C}$ применение итерационного алгоритма (8 итерации)
Ошибка	$1.75524 \cdot 10^{-5}$	$2.65021 \cdot 10^{-5}$	$2.51139 \cdot 10^{-5}$	$2.4427 \cdot 10^{-5}$	$2.42558 \cdot 10^{-5}$
Время (с.)	114.472	133.145	236.651	468.127	925.113

Стоит также отметить, что вновь построенный метод менее требователен к размеру вспомогательной подобласти $D \setminus D_S$, что позволяет уменьшить её размер, а тем самым уменьшить вычислительную сложность задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе метода задания интегральных граничных условий и трёхэтапного метода построены и программно реализованы вычислительные алгоритмы для решения ряда задач в неограниченной области. Результаты вычислительных экспериментов подтверждают корректность методов. Также они свидетельствуют о том, что если порядок точности квадратурных формул, используемых при реализации методов, согласован с порядком разностной схемы, то порядок схемы сохраняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tsynkov S.V.* Numerical solution of problems on unbounded domains. A review // *Appl. Math.* 1998. V. 27. P. 465–532.
 2. *Галанин М.П., Низкая Т.В.* Разработка и применение численного метода решения линейных эллиптических уравнений в неограниченной области // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2005. № 2. 29 с.
 3. *Ильгамов М.А., Гильманов А.Н.* Неотражающие условия на границах расчётной области. М.: Физматлит. 2003. 240 с.
 4. *Галанин М.П., Попов Ю.П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование. М.: Наука. Физматлит, 1995. 320 с.
 5. *Галанин М.П., Лотоцкий А.П., Попов Ю.П., Храмцовский С.С.* Численное моделирование пространственно трехмерных явлений при электромагнитном ускорении проводящих макротел // *Математическое моделирование*. 1999. Т. 11. № 8. С. 3–22.
 6. *Галанин М.П., Сорокин Д.Л.* Разработка и применение численных методов решения задач в неограниченной области на основе третьей формулы Грина // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2018. № 246. 24 с.
 7. *Галанин М.П., Сорокин Д.Л.* Разработка и применение численных методов решения задач с оператором смешанного типа в неограниченной области // *Дифференциальные уравнения*. М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2019. Т. 55. № 7. С. 949–961.
-

CONVERGENCE RESEARCH OF NUMERICAL METHODS FOR SOLVING PROBLEMS WITH MIXED TYPE OPERATOR IN AN UNLIMITED AREA

M. P. Galanin^{1,2}, D. L. Sorokin^{1,2}

¹ Keldysh Institute of Applied Mathematics (KIAM), Moscow

² Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moscow

sorokin.dmitr@yandex.ru

Abstract

Methods for solving problems of elliptic equations, based on the third Green formula, was analyzed. New methods for solving a problem with a mixed-type operator in an unbounded domain are proposed. On the basis of the proposed methods, programs for solving problems with a mixed type operator have been created. The results of computational experiments, showing the correctness of the application of methods, are presented.

Keywords: *unlimited area, mixed operator, electrodynamic accelerator, railgun, electromagnetic field, Maxwell's equations*

REFERENCES

1. *Tsynkov S.V.* Numerical solution of problems on unbounded domains. A review // *Appl. Math.* 1998. V. 27. P. 465–532.
2. *Galanin M.P., Nizkaia T.V.* Razrabotka i primeneniye chislennogo metoda resheniya lineinykh ellipticheskikh uravnenii v neogranichennoi oblasti // *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2005. № 2. 29 s.
3. *Ilgamov M.A., Gilmanov A.N.* Neotrazhaiushchie usloviya na granitsakh raschetnoi oblasti. M.: Fizmatlit, 2003. 240 s.
4. *Galanin M.P., Popov Iu.P.* Kvizistatsionarnye elektromagnitnye polya v neodnorodnykh sredakh: Matematicheskoe modelirovanie. M.: Nauka. Fizmatlit, 1995. 320 s.
5. *Galanin M.P., Lototskii A.P., Popov Iu.P., Khramtsovskii S.S.* Chislennoe modelirovanie prostranstvenno trekhmernykh iavlenii pri elektromagnitnom uskorenii provodiashchikh makrotel // *Matematicheskoe modelirovanie.* 1999. T. 11. No 8. S. 3–22.

6. Galanin M.P., Sorokin D.L. Razrabotka i primeneniye chislennykh metodov resheniya zadach v neogranichennoi oblasti na osnove tretei formuly Grina // Preprinty IPM im. M.V. Keldysha, 2018. № 246. 24 s.

7. Galanin M.P., Sorokin D.L. Development and Application of Numerical Methods for Equations of Mixed Type in an Unbounded Domain // Differential Equations. Pleiades Publishing. 2019. T. 55. No 7. S. 915–928.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



ГАЛАНИН Михаил Павлович – д. ф.-м. н., гл. н. с., и.о. заведующего отделом Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, профессор Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Автор более 240 печатных работ в области вычислительного эксперимента, вычислительной математики, математического моделирования многомерных нестационарных процессов в сплошных средах.

Mikhail Pavlovich GALANIN – Doctor of science, Head of Department of Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Professor of Bauman Moscow State University. Author of more than 240 publications in the field of computational experiment, computational mathematics, mathematical simulation of multidimensional non-stationary processes in continuous media.

E-mail: galan@keldysh.ru



СОРОКИН Дмитрий Леонидович — младший научный сотрудник Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, ассистент Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Область исследований: численное моделирование нестационарных электромагнитных полей.

Dmitry Leonidovich SOROKIN – Junior Researcher of Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Assistant of Bauman Moscow State University. Scientific interest: mathematical simulation of non-stationary electrodynamic fields.

E-mail: sorokin.dmitr@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 15 ноября 2019 года