УДК 517.31 + 378.147

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ОТНОСИТЕЛЬНО МЕТОДА ЕГО НАХОЖДЕНИЯ

С.В. Костин

Российский технологический университет, Москва

kostinsv77@mail.ru

Аннотация

Отмечена инвариантность неопределенного интеграла относительно метода его нахождения. Рассмотрена и решена с помощью трех различных методов модельная задача, на примере которой можно разъяснить студентам суть этой инвариантности. Отмечена важность формирования и развития математической культуры студентов технических университетов.

Ключевые слова: *первообразная, неопределенный интеграл, методы интегрирования*

Опыт проведения практических (семинарских) занятий по математическому анализу показывает, что при нахождении неопределенных интегралов иногда возникает интересная ситуация – при одном способе решения задачи получается одно аналитическое выражение для интеграла, а при другом способе решения задачи получается другое, иногда существенно отличающееся от первого, аналитическое выражение для того же интеграла.

Видя получившиеся различные ответы, студенты иногда спрашивают: не допустили ли мы какой-либо ошибки? какое из двух решений является верным? Эти недоуменные вопросы студентов ни в коем случае не следует оставлять без ответа. Надо обратить внимание студентов на то, что неопределенный интеграл – это множество всех первообразных данной функции. Как известно, любые две первообразные либо совпадают, либо различаются на константу. Поэтому, если оба решения задачи не содержат каких-либо ошибок, то полученные в результате функции (даже при кажущейся на первый взгляд совершенно различной форме их записи) обязаны либо совпадать, либо различаться на константу.

Наш опыт преподавания математического анализа в техническом вузе (Российский технологический университет РТУ МИРЭА) показывает, что в каком-то смысле целесообразно «действовать на упреждение». Возможно, еще до появления перечисленных выше вопросов студентов целесообразно на примере какой-либо модельной задачи специально проиллюстрировать различные методы ее решения, после чего совместно со студентами обсудить возникающую неоднозначность в записи ответа.

Эта модельная задача не должна быть ни технически сложной, ни громоздкой, но в то же время она должна быть достаточно интересной (хорошо и давно замечено, что школьникам и студентам одинаково неинтересно решать как очень простые, так и очень сложные задачи, поэтому для любого преподавателя математики чрезвычайно важно работать с обучающимися на интересном и содержательном, но в то же время не запредельно сложном для них учебном материале).

Думается, что практически идеально для этой цели подходит задача нахождения следующего неопределенного интеграла:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}. \tag{1}$$

Мы будем рассматривать неопределенный интеграл (1) на промежутке $X=[1,+\infty)$ (кстати, можно с очень большим сожалением отметить тот факт, что во многих учебниках, задачниках и практикумах по математическому анализу авторы находят неопределенные интегралы, не указывая, на каком именно промежутке эти интегралы рассматриваются; более детальное рассмотрение некоторых из этих задач показывает, что полученные авторами формулы на самом деле верны только на части множества определения подынтегральной функции; фактически речь идет об очень формальном, если не сказать математически безграмотном, подходе к решению математической задачи …).

Мы рассмотрим пять методов решения задачи (1) и затем обсудим полученные результаты, в частности, обсудим вопрос о том, как именно отличаются друг от друга полученные нами аналитические выражения для данного неопределенного интеграла.

МЕТОД 1. Поскольку $x \in [1, +\infty)$, то можно применить замену переменной $x = t^2 + 1$, где $t \in [0, +\infty)$. Тогда, $t = \sqrt{x-1}$ $dx = 2tdt$. Имеем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + C \,. \qquad (2)$$

Поскольку функция $F_1(x) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$ непрерывна на промежутке $X = [1, +\infty)$ и во всех внутренних точках этого промежутка имеет место равенство $F_1'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$, то функция $F_1(x)$ является первообразной для функции $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$ на промежутке X .

МЕТОД 2. Поскольку $x \in [1, +\infty)$, то можно применить замену переменной $x = \dfrac{1}{t}$, где $t \in (0, 1]$. Тогда $t = \dfrac{1}{x}$, $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$. Имеем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int \frac{\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t}-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}} = -\int \frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}} = -\arcsin\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C = -\arcsin\frac{2-x}{x} + C \,. \qquad (3)$$

Поскольку функция $F_2(x) = -\arcsin\dfrac{2-x}{x}$ непрерывна на промежутке $X = [1, +\infty)$ и во всех внутренних точках этого промежутка имеет место равенство $F_2'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$, то функция $F_2(x)$ является первообразной для функции $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$ на промежутке X .

МЕТОД 3. Поскольку $x \in [1, +\infty)$, то можно применить замену переменной $x = \dfrac{1}{\sin^2 t}$, где $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sin t = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $t = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $dx = \dfrac{-2\cos t}{\sin^3 t}dt$. Имеем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int \frac{\frac{-2\cos t}{\sin^3 t}dt}{\frac{1}{\sin^2 t}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}} = -\int \frac{\frac{-2\cos t}{\sin^3 t}dt}{\frac{\cos t}{\sin^3 t}} = -2\int dt = -2t + C = -2\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}} + C \,. \qquad (4)$$

Поскольку функция $F_3(x) = -2\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}$ непрерывна на промежутке $X = [1, +\infty)$ и во всех внутренних точках этого промежутка имеет место равенство $F_3'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$, то функция $F_3(x)$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$ на промежутке X.

Итак, мы нашли неопределенный интеграл (1) с помощью трех разных методов и в результате пришли к трем различным (или, во всяком случае, выглядящим на первый взгляд различными) ответам

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \begin{cases} 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + C; \\ -\arcsin\frac{2-x}{x} + C; \\ -2\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}} + C. \end{cases} \tag{5}$$

Другими словами, мы нашли три первообразные одной и той же функции $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$ на промежутке $X = [1, +\infty)$, а именно:

$$F_1(x) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}; \tag{6}$$

$$F_2(x) = -\arcsin\frac{2-x}{x}; \tag{7}$$

$$F_3(x) = -2\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}} \tag{8}$$

Докажем, что функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ различаются на константу $\frac{\pi}{2}$. Иначе говоря, докажем, что при всех $x \in [1, +\infty)$ имеет место равенство

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2-x}{x}. \tag{9}$$

Способ 1. Поскольку число $\sqrt{x-1}$ неотрицательно, то $\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, левая часть равенства (9) принадлежит промежутку $[0,\pi)$. Далее, поскольку арксинус принимает значения в промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, то правая часть равенства (9) принадлежит промежутку $[0,\pi]$.

Итак, как левая, так и правая части равенства (9) принадлежат промежутку $[0,\pi]$. На этом промежутке функция $\cos x$ строго убывает. Поэтому, если мы докажем равенство косинусов левой и правой частей равенства (9), то отсюда автоматически будет следовать равенство (9).

При нахождении косинуса левой части равенства (9) воспользуемся следующей формулой:

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}. \tag{10}$$

Имеем:

$$\cos(2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1})=\frac{1-(x-1)}{1+(x-1)}=\frac{2-x}{x}. \tag{11}$$

Теперь найдем косинус правой части формулы (9):

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{2-x}{x}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{2-x}{x}\right)=\frac{2-x}{x}. \tag{12}$$

Мы видим, что косинусы левой и правой части равенства (9) равны. Следовательно, с учетом сказанного выше, равенство (9) доказано.

Способ 2. Рассмотрим функцию

$$G(x)=2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+\arcsin\frac{2-x}{x}. \tag{13}$$

Функция $G(x)$ непрерывна на промежутке $[1,+\infty)$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого промежутка. С помощью простых вычислений найдем, что при всех $x\in(1,+\infty)$ имеет место равенство $G'(x)=0$. Следовательно, согласно известной теореме математического анализа, функция $G(x)$ постоянна на промежутке $[1,+\infty)$, то есть $G(x)=C$ при всех $x\in[1,+\infty)$.

Поскольку

$$G(1) = 2\operatorname{arctg} 0 + \arcsin 1 = 2 \cdot 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \qquad (14)$$

то $C = \frac{\pi}{2}$.

Итак, доказано, что при всех $x \in [1, +\infty)$ имеет место равенство

$$G(x) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + \arcsin\frac{2-x}{x} = \frac{\pi}{2}. \qquad (15)$$

Последнее равенство равносильно равенству (9).

Таким образом, мы доказали (причем двумя различными способами), что функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ различаются на константу (а именно, на константу $\frac{\pi}{2}$). Аналогично доказывается, что функции $F_1(x)$ и $F_3(x)$ тоже различаются на константу.

Графики первообразных $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F_3(x)$ изображены на рис. 1.

Тот факт, что первообразные $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F_3(x)$ отличаются друг от друга на константы, означает очень важный факт, а именно, что полученные нами формулы (5), хотя они довольно сильно отличаются друг от друга по внешнему виду, на самом деле описывают одно и то же множество функций.

Фактически можно говорить о своеобразной инвариантности, независимости неопределенного интеграла относительно метода его нахождения. Мы считаем, что на это обстоятельство крайне важно обратить внимание студентов при изучении темы «Неопределенный интеграл». Это снимет возможные недоуменные вопросы студентов и, по нашему мнению, существенно обогатит их кругозор и математическую грамотность.

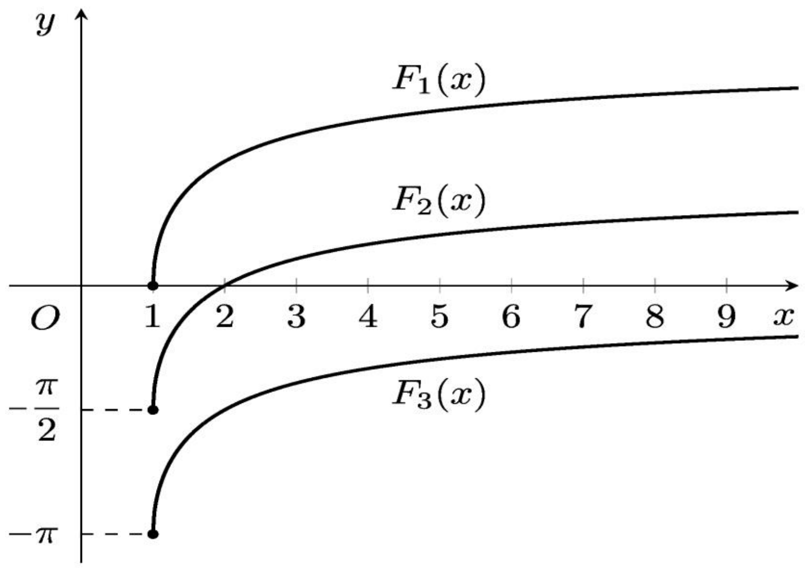


Рисунок 1. Графики функций $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F_3(x)$

Подводя итог данной статьи, хотелось бы отметить три обстоятельства.

1) Крайне важной составной частью математической культуры студентов, по нашему мнению, является не только умение находить неопределенные интегралы различных типов, но также умение доказывать, обосновывать и отстаивать справедливость полученного результата (в частности, если он отличается по внешнему виду от того ответа, который приведен в конце учебника или в конце задачника).

2) Разговор со студентами об инвариантности неопределенного интеграла относительно метода его нахождения должен носить не абстрактно-теоретический, а содержательный характер. И в этом смысле, по нашему мнению, очень показательной может оказаться та задача, которую мы рассмотрели в данной статье.

3) Не следует думать, что рассмотренная нами задача имеет только три метода решения. На самом деле, этих методов значительно больше. Было бы исключительно полезным привлечь студентов к поиску новых (в частности, оригинальных и нестандартных) методов решения как этой, так и других математических задач.

Мы надеется, что данная статья заинтересовала читателей, и будем очень благодарны за любые комментарии или замечания по затронутым нами вопросам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Костин С.В.* Об определении понятия «первообразная» в курсе математического анализа // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона: периодический межвузовский сборник научно-методических работ. Вып. 20 / Вятский гос. ун-т; гл. ред. Е.М. Вечтомов. Киров: Науч. изд-во ВятГУ, 2018, 340 с.

2. *Костин С.В.* Нахождение интегралов от произведений целых степеней косинуса и синуса // Непрерывное образование в современном мире: история, проблемы, перспективы: материалы VI Всероссийской с международным участием научно-практической конференции (Борисоглебск, 30 марта 2019 г.). / Воронежский гос. ун-т. Борисоглебский филиал. М.: Перо, 2019, 394 с.

3. *Костин С.В.* Методические особенности изучения интеграла Римана в курсе математического анализа для студентов технических вузов // Научно-методический журнал «CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование», 2016, № 1, С. 73–84.

ON THE INVARIANCE OF INDEFINITE INTEGRAL ON THE METHOD OF IT'S CALCULATION

S.V. Kostin

Russian Technological University, Moscow

kostinsv77@mail.ru

Abstract

Invariance of the indefinite integral on the method of its calculation is noted. Model problem that can be used for the demonstration of this invariance is treated and solved via three different methods. Significance of formation and development of student's mathematical culture is noted.

Keywords: *primitive, indefinite integral, methods of integration*

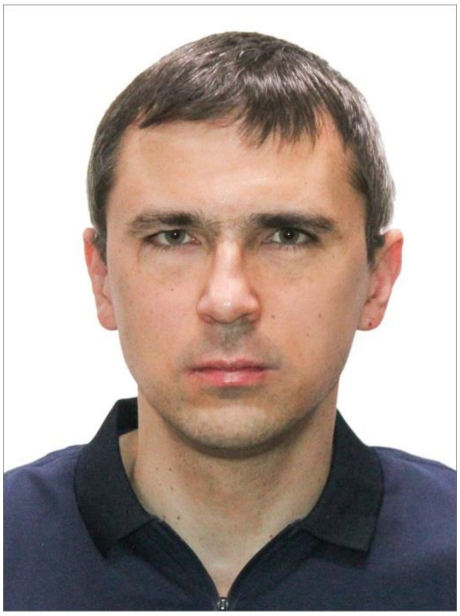
REFERENCES

1. *Kostin S.V.* Ob opredelenii ponyatiya “pervoobraznaya” v kurse matematicheskogo analiza // Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona: periodicheskij mezhvuzovskij sbornik nauchno-metodicheskix rabot. Vy`p. 20 / Vyatskij gos. un-t; gl. red. E.M. Vechtomov. Kirov: Nauch. izd-vo VyatGU, 2018, 340 s.

2. *Kostin S.V.* Naxozhdenie integralov ot proizvedenij cely`x stepenej kosinusa i sinusa // Neprery`vnoe obrazovanie v sovremennom mire: istoriya, problemy`, perspektivy`: materialy` VI vserossijskoj s mezhdunarodny`m uchastiem nauchno-prakticheskoj konferencii (Borisoglebsk, 30 marta 2019 g.). / Voronezhskij gos. un-t. Borisoglebskij filial. M.: Pero, 2019, 394 s.

3. *Kostin S.V.* Metodicheskie osobennosti izucheniya integrala Rimana v kurse matematicheskogo analiza dlya studentov texnicheskix vuzov // Nauchno-metodicheskij zhurnal “CONTINUUM. Matematika. Informatika. Obrazovanie”, 2016, No 1, S. 73–84.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ



КОСТИН Сергей Вячеславович – старший преподаватель, Российский технологический университет, Москва.

Sergey Vyacheslavovich KOSTIN – senior lecturer, Russian Technological University, Moscow.

email: kostinsv77@mail.ru

Материал поступил в редакцию 4 сентября 2019 года