УДК 372.8:514.7

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АУТЕНТИЧНЫХ НАУЧНЫХ ТЕКСТОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

И.В. Игнатушина

Оренбургский государственный педагогический университет, Оренбург

streleec@yandex.ru

Аннотация

Представлена классификация задач по дифференциальной геометрии, в основе которой лежит характер связей между элементами задачи и соотношение между воспроизводящей и творческой деятельностью студентов при их решении. Показано, что важным источником для выбора текстов задач и методов их решения являются труды ученых – создателей классической дифференциальной геометрии. Работа с соответствующим научным текстом позволяет обучающемуся освоить такую образовательную стратегию, как методологическая редукция.

Ключевые слова: *дифференциальная геометрия, решение задач, исторический материал*

Умение решать математические задачи является одним из главных показателей освоения соответствующего учебного материала. Поэтому метод работы со специальной системой задач занимает ведущее место в обучении математике. Если понятие математической задачи трактовать достаточно широко, в частности, считать всякую теорему задачей, то математическая деятельность обучающихся сводится к решению задач. Решение каждой математической задачи осуществляется по следующим основным этапам:

- понимание условия и требования задачи, ясное усвоение и осмысление отдельных элементов условия;
- составление плана решения;
- практическая реализация плана во всех его деталях;

- проверка правильности полученного результата и корректировка решения в случае допущения ошибок;
- окончательное рассмотрение задачи и её решения с целью выявления тех моментов, которые могут стать полезными в дальнейшем.

Отталкиваясь от характера связей между элементами задачи и соотношения между воспроизводящей и творческой деятельностью студентов при ее решении, можно предложить следующую классификацию задач по дифференциальной геометрии: алгоритмические задачи, полуалгоритмические задачи, эвристические задачи.

К алгоритмическим относятся задачи, которые решаются с помощью непосредственного применения определения, теоремы, т. е. для решения которых имеется алгоритм.

Например, найти уравнение касательной к винтовой линии.

Решение. Уравнение касательной в координатной форме имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{x'}=\frac{y-y_0}{y'}=\frac{z-z_0}{z'}.$$

Винтовая линия задается системой уравнений: $x=a\cos u$, $y=a\sin u$, $z=bu$. Следовательно, уравнение искомой касательной будет иметь вид:

$$\frac{x-a\cos u}{-a\sin u}=\frac{y-a\sin u}{a\cos u}=\frac{z-bu}{b}.$$

Любая из полуалгоритмических задач в качестве подзадач содержит алгоритмические задачи, а правила ее решения носят обобщенный характер. Решая полуалгоритмические задачи, студент учится «сворачивать» знания, фиксируя их в своем сознании крупными блоками. При этом усвоенные алгоритмы он начинает применять в разных ситуациях.

Пример полуалгоритмической задачи: углом пересечения двух линий называют угол, составленный касательными к этим линиям в их общей точке. Определить угол пересечения двух парабол с общей осью, если фокус каждой из них находится в вершине другой.

Решение. Согласно условию задачи, параболы имеют оси, расположенные на одной прямой, но противоположно направленные (в противном случае рассматриваемые параболы не пересекались бы). Если уравнение одной из них имеет вид $y^2 = 2px$, то другой параболе будет соответствовать уравнение: $y^2 = -2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$.

В точке $\left(\frac{p}{4}; \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$ пересечения этих парабол угловые коэффициенты их касательных будут: для первой параболы $\sqrt{2}$, для второй $-\sqrt{2}$. Тогда параболы пересекаются под углом, тангенс которого имеет значение:

$$tg\varphi = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}}{1-2} = 2\sqrt{2}\,.$$

Отсюда угол пересечения парабол будет $\varphi = arctg 2\sqrt{2}$.

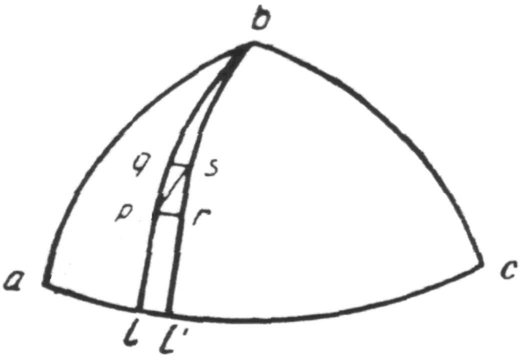
В силу симметрии этих парабол относительно оси абсцисс во второй точке пересечения $\left(\frac{p}{4}; -\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$ угол между параболами будет таким же.

Для решения эвристической задачи студенту необходимо выявить некоторые скрытые связи между элементами условия и требования или найти способ решения, который не является очевидной конкретизацией некоторого обобщенного правила, известного обучаемому, или сделать и то, и другое.

За свою историю дифференциальная геометрия накопила огромное количество таких задач. Поэтому научные работы создателей этого раздела математики могут стать прекрасным источником для поиска не только соответствующих текстов задач, но и идей для их решения.

Приведем пример эвристической задачи, взятой из работы Л. Эйлера «Об изображении поверхности шара на плоскости» (1777 г.) [3]: доказать, что любой кусок сферы невозможно конгруентно отобразить на плоскость.

Решение. Пусть *abc* – часть сферы единичного радиуса (рис. 1), *b* – полюс, *ac* – часть экватора, *ab* – нулевой меридиан, *p* – некоторая точка на сфере (ее положение задается долготой $al = t$ и широтой $lp = u$). Если зададим приращение долготы $dt = ll'$ и широты $du = pq$, то получим на сфере точку s с координатами $(t + dt; u + du)$. Отрезок ps есть линейный элемент сферы. Точка r имеет долготу $t + dt$ и широту $l'r = u$, тогда $pr = \cos u dt$. В силу малости dt и du можно считать $pqrs$ прямоугольником, диагональ которого $ps = \sqrt{du^2 + \cos^2 u dt^2}$.



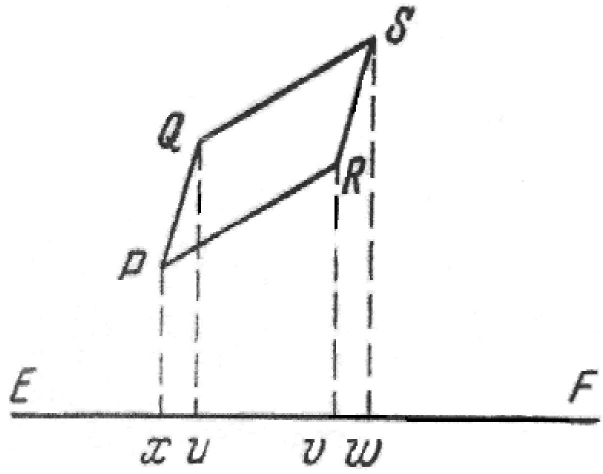


Рисунок 1 Рисунок 2

Точки P, Q, R, S плоскости (рис. 2) соответственно являются образами точек *p*, q, r, s сферы. Для определения их координат Эйлер выбирает прямоугольную декартовую систему координат с началом в точке E и осью абсцисс EF. Координатами точки P будут $EX = x$ и $PX = y$.

Далее отмечается, что, так как точка P получается при отображении точки $p(t;u)$ сферы на основании некоторого закона, то ее координаты x и y задаются как функции от двух переменных t и u.

Точка q получается из точки *p* только изменением широты u, поэтому координаты точки Q будут иметь следующие значения: $EU = x + \frac{\partial x}{\partial u} du$, $QU = y + \frac{\partial y}{\partial u} du$.

Аналогично, так как точка r получается из точки *p* при изменении только долготы t, то координаты точки R следующие: $EV = x + \frac{\partial x}{\partial t} dt$, $RV = y + \frac{\partial y}{\partial t} dt$.

Наконец, точка s получается из точки *p* путем одновременного изменения t и u, поэтому координаты точки S имеют вид: $EW = x + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial t} dt$, $SW = y + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial t} dt$.

Далее найдем величины: $XU = EU - EX = \frac{\partial x}{\partial u}du$; $VW = EW - EV = \frac{\partial x}{\partial u}du$; $QU - PX = \frac{\partial y}{\partial u}du$; $SW - RV = \frac{\partial y}{\partial u}du$, которые попарно равны. Отсюда следует, что $RS = PQ$ и $QS = PR$. Таким образом, четырехугольник $PQSR$ является параллелограммом со сторонами: $PQ = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}du$, $PR = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}dt$.

Обозначив через φ угол наклона PQ к оси EF, а через β – угол наклона PR к EF и положив: $\frac{\partial x}{\partial u} = p$, $\frac{\partial x}{\partial t} = q$, $\frac{\partial y}{\partial u} = r$, $\frac{\partial y}{\partial t} = s$ (не путать с обозначениями точек на сфере), получим:

$$tg\varphi = (QU - PX) : XU = \frac{\partial y}{\partial u} : \frac{\partial x}{\partial u},\ tg\beta = (RV - PX) : XV = \frac{\partial y}{\partial t} : \frac{\partial x}{dt},$$

$$XW = dx = pdu + qdt,\ SW - PX = dy = rdu + sdt. \tag{1}$$

Чтобы два последних выражения были полными дифференциалами, на функции p, q, r, s Эйлер накладывает следующие условия:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial u}. \tag{2}$$

Предположим, что прямоугольник $pqsr$ сферы отобразился в конгруентный ему четырехугольник $PQSR$ плоскости. Тогда $PQ = pq$, $PR = pr$, $\angle QPR = 90^\circ$ и, следовательно:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} = 1 \text{ или } p^2 + r^2 = 1, \tag{3}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \cos u \text{ или } q^2 + s^2 = \cos^2 u,\ \frac{\partial y}{\partial u} : \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial t} : \frac{\partial y}{\partial t} \text{ или } \frac{r}{p} = -\frac{q}{s}.$$

Из этих равенств Эйлер заключает, что $p = \cos\varphi$, $r = \sin\varphi$, $q = -\sin\varphi\cos u$,. $s = \cos\varphi\cos u$ Тогда равенства (1) примут вид:

$$dx = \cos\varphi du - \sin\varphi\cos u dt,\quad dy = \sin\varphi du + \cos\varphi\cos u dt,$$

а условия (2) можно записать так:

$$-\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\sin u\sin\varphi-\cos u\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \tag{4}$$

$$\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\sin u\cos\varphi-\cos u\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}. \tag{5}$$

Умножив равенство (4) на $\cos\varphi$, а равенство (5) на $\sin\varphi$ и сложив результаты, получим $0=\cos u\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0. \tag{6}$$

Умножив (4) на $-\sin\varphi$, а (5) – на $\cos\varphi$ и сложив результаты, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\sin u. \tag{7}$$

Равенство (6) показывает, что φ должно зависеть только от переменной t, что противоречит (7), из которого выходит, что $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ изменяется с изменением u.

Таким образом, Эйлер заключает: «Вполне точное [т. е. конгруентное] изображение [хотя бы куска сферы на плоскость] полностью исключается, и мы вынуждены волей-неволей обратиться к изображениям, которые не будут подобными, у которых фигура на плоскости чем-нибудь отличается от изображаемой ею фигуры на сфере» [1, с. 75].

Работа с научным текстом позволяет обучающемуся освоить такую образовательную стратегию, как методологическая редукция, или реконструкция идей, посредством которых он, изучая ход мыслей создателей классической дифференциальной геометрии, воспроизводит математическую логику мышления, осуществляя тем самым трансфер проблемно-поискового способа научного исследования [2]. Это способствует не только лучшему пониманию студентами изучаемого материала, но и служит подготовительным этапом к их будущей научно-исследовательской работе. Поэтому включение в содержание учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия» научно-исторического контекста, в частности, через использование в обучении аутентичных текстов создателей дифференциальной геометрии, является значимым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Игнатушина И.В.* Материалы для спецкурса «Из истории формирования классической дифференциальной геометрии: применение математического анализа к геометрии в работах Леонарда Эйлера». Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2010, 132 с.

2. *Игнатушина И.В.* Принцип центризма научного текста и его реализация в обучении дифференциальной геометрии // Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. Электронный научный журнал. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2016. №1, С. 236–243.

3. *Эйлер Л.* О географической проекции поверхности шара // Избранные картографические статьи. М., 1959. С. 51–64.

THE USE OF AUTHENTIC SCIENTIFIC TEXTS IN THE PROCESS OF TEACHING STUDENTS TO SOLVE TASKS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY

Inessa Ignatushina

Orenburg State Pedagogical University, Orenburg

streleec@yandex.ru

Abstract

In the article presents the classification of problems by differential geometry, which is based on the nature of the relationship between the elements of the problem and the relationship between the reproducing and creative activity of students in their decision. It is shown that an important source for the choice of texts of problems and methods of their solution are the works of scientists – creators of classical differential geometry. Work with the corresponding scientific text allows the student to master such an educational strategy as methodological reduction.

Keywords: *differential geometry, problem solving, historical material*

REFERENCES

1. *Ignatushina I.V.* Materialy` dlya speczkursa "Iz istorii formirovaniya klassicheskoj differencial`noj geometrii: primenenie matematicheskogo analiza k geometrii v rabotax Leonarda E`jlera". Orenburg: Izd-vo OGPU, 2010, 132 s.

2. *Ignatushina I.V.* Princip centrizma nauchnogo teksta i ego realizaciya v obuchenii differencial`noj geometrii // Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. E`lektronny`j nauchny`j zhurnal. Orenburg: Izd-vo OGPU, 2016, No 1, S. 236–243.

3. E`jler L. O geograficheskoj proekcii poverxnosti shara // Izbranny`e kartograficheskie stat`i. M., 1959,. S. 51–64.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ИГНАТУШИНА Инесса Васильевна –декан физико-математического факультета, Оренбургский государственный педагогический университет, Оренбург.

Inessa IGNATUSHINA – dean of the faculty of physics and mathematics, Orenburg State Pedagogical University, Orenburg.

email: streleec@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 3 августа 2019 года