УДК 514.1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ С ПОМОЩЬЮ ОДНОЙ ЛИНЕЙКИ

И.Б. Барский[1], И.Н. Сергеева[2]

Марийский государственный университет, Йошкар-Ола

[1] igor.barski@mail.ru, [2] sergeevairinan@yandex.ru

Аннотация

Представлен в сокращенном варианте один из разделов спецкурса «Конструктивная геометрия», читаемого студентам-математикам педагогического направления Марийского государственного университета. Материал составлен так, что может быть рекомендован учителям математики для включения в соответствующий школьный спецкурс.

Ключевые слова: *спецкурс, построения одной линейкой, система аксиом, основные построения*

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена одному из разделов «Конструктивной геометрии», который входит составной частью в одноименный спецкурс общей программы подготовки студентов-математиков педагогического направления Марийского государственного университета (9 семестр).

Материал разработан таким образом, что он может быть включен и в соответствующий школьный спецкурс.

По понятным причинам в представленной работе мы остановимся только на отдельных элементах теории, а остальные вопросы просто перечислим. При этом отметим, что теория геометрических построений на плоскости с помощью одной линейки во многом аналогична теории геометрических построений циркулем и линейкой, представленной в работе автора [1].

СИСТЕМА АКСИОМ ПОСТРОЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОДНОЙ ЛИНЕЙКИ

Основные фигуры*:* точки и прямые.

Основным (неопределяемым) понятием является понятие *построить геометрическую фигуру* (начертить фигуру, построить линию, отметить точку и т. п.), которое характеризуется следующими *аксиомами* (постулаты построенной фигуры, обозначены буквой П):

$П_1$. Точки и прямые, заданные условиями задачи на построение, считаются построенными фигурами (т. е. уже изображенными, начерченными).

$П_2$. Существует хотя бы одна построенная прямая.

$П_3$. На любой данной (построенной) прямой существуют по крайней мере три данные (построенные) точки.

$П_4$. Существует по крайней мере одна точка, не лежащая на данной (построенной) прямой.

$П_5$. На данной (построенной) прямой, а также вне этой прямой существуют точки, не совпадающие ни с одной из уже построенных на прямой или вне прямой.

Замечание. Постулаты $П_2$–$П_5$ могут быть заменены постулатом $П^*$: «Существуют хотя бы две построенные пересекающиеся прямые, на каждой из которых имеются по крайней мере две построенные точки, отличные от точки пересечения прямых». Тогда, пользуясь постулатами $П_1$ и $П^*$, с помощью линейки можно построить конечное множество точек, лежащих или не лежащих на данной (построенной) прямой, отличных от данных и уже построенных точек.

Шагом построения называют операцию, позволяющую к данным (построенным) фигурам присоединить новые точки и прямые.

Линейка – основной чертежный инструмент, удовлетворяющий аксиоме (аксиома линейки): линейка позволяет провести (построить) прямую, проходящую через две данные (построенные) точки; никаких других операций выполнять линейкой нельзя.

Аксиомы построений (обозначать будем буквой А):

$А_1$. Если даны (построены) две точки А и В, то прямая АВ считается построенной.

$А_2$. Если даны (построены) две пересекающиеся прямые a и b, то точка их пересечения $А=a \cap b$ считается построенной.

Построения, о возможности которых сказано в аксиомах, рассмотренных выше, т. е. утверждения, в которых указано, какие шаги построения мы считаем выполненными, называют *простейшими построениями*.

Само число выполняемых шагов построения конечно.

Постановка и решение задачи на построение. Основные построения

Постановка задачи: дано конечное множество основных построенных фигур (точек и прямых).

Описано свойство, характеризующее искомую непостроенную основную фигуру F. Требуется, используя аксиомы A_1 и A_2, получить конечное множество основных построенных фигур, содержащих фигуру F.

Решить задачу на построение (выполнить построение искомой фигуры) – это значит указать конечную последовательность (конечное число шагов) простейших построений, после выполнения которых искомая фигура будет считаться построенной в силу принятых аксиом (см. п. 2).

Однако на практике построение искомой фигуры сводят не только к простейшим построениям (A_1, A_2 с учетом постулатов $П_1$–$П_5$), а также к некоторым типичным, часто встречающимся комбинациям простейших построений, которые называются *основными построениями*. А для решения отдельных «*сложных*» задач допускается пользоваться уже найденным решением какой-либо «*простой*» задачи в целом, т. е., не расчленяя на простейшие построения.

Построение фигуры, заключающееся в последовательном перечислении простейших построений (или ранее решенных задач), обычно сопровождается *графическим оформлением* каждого его шага с помощью линейки, т. е. выполнением чертежа (рисунка), который является *иллюстрацией* данного построения.

Рассмотрим один из вариантов списка основных построений (обозначим: ОП):

$ОП_1$. Даны прямая AB, точка C – середина отрезка AB и точка $M \notin AB$. Построить прямую $MT \parallel AB$.

$ОП_2$. Даны две параллельные прямые *a* и *b*. Даны точки $A \in a$ и $B \in a$. Построить точку C – середину отрезка AB.

$ОП_3$. Даны две параллельные прямые *a* и *b*. Дана точка M: $M \notin a$, $M \notin b$. Построить прямую $MT \parallel a$.

Схема решения задач на построение одной линейкой

Данный материал излагается аналогично изложению его при построении с помощью циркуля и линейки, при этом сохраняются и этапы построения (анализ, построение, доказательство и исследование [1], гл. 6).

Основные определения

Определение 1. Каждую прямую *a* плоскости σ дополним еще одной точкой, которую обозначим A_∞ ($A_\infty \in a$) и назовем *несобственной* или *бесконечно удаленной* точкой. При этом, если прямые $a \parallel b$ и $A_\infty \in a$, $B_\infty \in b$, то считаем, что $A_\infty = B_\infty$, а если $a \nparallel b$, то $A_\infty \neq B_\infty$.

Определение 2. Множество всех несобственных точек плоскости назовем *несобственной прямой.*

Определение 3. Говорят, что точка C прямой AB делит отрезок AB в отношении $\lambda \neq -1$, считая от точки A, если $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{CB}$. Само число λ обозначается: λ=(AB,C) и называется *простым* отношением трех точек A, B, C данной прямой.

Определение 4. Сложным отношением четырех точек A, B, C, D данной прямой *a,* D≠A называют число, обозначаемое (AB, CD) и вычисляемое по закону $(\mathrm{AB}, \mathrm{C}D) = (AB, C)/(AB, D)$.

Определение 5. Сложным отношением четырех точек A, B, C, D_∞ данной прямой *a* называют число, обозначаемое (AB, CD_∞) и вычисляемое по закону (AB, CD_∞)=−(AB,C).

Определение 6. Говорят, что пара точек A и B прямой *a разделяет* пару точек C и D данной прямой, если (AB, CD)<0, и *не разделяет* пару точек C и D, если (AB, CD)>0.

Определение 7. Говорят, что пара точек A и B прямой *a гармонически разделяет* пару точек C и D данной прямой, если (AB, CD)=−1, при этом точку D называют *четвертой гармонической*.

Определение 8. Полным четырехвершинником называется фигура, состоящая из четырех точек (*вершин*) плоскости общего положения (никакие три из которых не лежат на одной прямой) и шести прямых (*сторон*), соединяющих попарно эти точки.

Определение 9. Стороны полного четырехвершинника, не имеющие общей вершины, называются *противоположными*.

Определение 10. Точки пересечения противоположных сторон полного четырехвершинника называются *диагональными*, а прямые, попарно соединяющие диагональные точки, – *диагоналями*.

Также рассматриваются некоторые другие понятия.

Основные предложения

Здесь будет доказан ряд свойств сложного отношения четырех точек (используя простое отношение трех точек); формулируется теорема об однозначном задании кривой второго порядка (эллипса, гиперболы, параболы) пятью точками общего положения и некоторые другие предложения.

В качестве примера рассмотрим доказательство одной из теорем.

Теорема. (AB, CD)=(BA,DC).

Доказательство: пусть (AB, C)=λ_1, (AB, D)=λ_2, (BA, D)=λ_3, (BA, C)=λ_4, тогда по определению 3: $\overrightarrow{\mathrm{AC}}= \lambda_1 \overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{AD}= \lambda_2 \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}= \lambda_3 \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{B\mathrm{C}}= \lambda_4 \overrightarrow{\mathrm{C}A}$. Из последних двух равенств следует:

$\overrightarrow{\mathrm{A}D}= \frac{1}{\lambda 3} \overrightarrow{D\mathrm{B}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}C}= \frac{1}{\lambda 4} \overrightarrow{C\mathrm{B}}$, но тогда $\lambda_1=\frac{1}{\lambda 4}$, $\lambda_2=\frac{1}{\lambda 3}$, откуда $\frac{\lambda 1}{\lambda 2} = \frac{\frac{1}{\lambda 4}}{\frac{1}{\lambda 3}} = \frac{\lambda 3}{\lambda 4}$.

По определению 4: $(\mathrm{AB}, \mathrm{C}D) = \frac{(AB,C)}{(AB,D)} = \frac{\lambda 1}{\lambda 2}$, $(\mathrm{BA}, D\mathrm{C}) = \frac{(BA,D)}{(BA,C)} = \frac{\lambda 3}{\lambda 4} = \frac{\lambda 1}{\lambda 2}$. Следовательно, (AB, CD)=(BA,DC), ч. т. д.

Задачи на построение одной линейкой

Задачи на построение одной линейкой с введением данных вспомогательных фигур:

Даны две параллельные прямые; 8.2 Дан параллелограмм; 8.3 Дан прямоугольник; 8.4 Дан квадрат; 8.5 Даны окружность и ее центр; 8.6 Даны эллипс и его центр (парабола, гипербола).

В параграфе 8.5 (геометрические построения одной линейкой, если дана вспомогательная окружность ω) мы сначала вводим дополнительно к постулатам $П_1$–$П_5$ и аксиомам A_1, A_2 следующие аксиомы:

$П_6$. На данной окружности ω, а также вне ω существует произвольная точка, не совпадающая ни с одной из уже построенных на окружности ω или вне ω точек.

A_3. Если дана (построена) прямая *a*, и она пересекает данную (по условию) окружность ω, то точки пересечения окружности ω и прямой *a* считаются построенными.

Замечание. Мы различаем два предложения:

1) окружность ω задана по условию задачи (вспомогательная окружность);

2) даны две точки A и B, тогда окружность ω_1 с центром в точке A и радиусом *R*, равным длине отрезка AB, считается построенной, ω_1=(A, *R*=AB).

Первое означает, что вся линия ω построена. Во втором случае мы говорим лишь о возможном построении конечного числа точек, принадлежащих окружности ω_1, т. е. кроме данных (построенных) точек A и B, все другие точки окружности ω_1 строятся.

В данном параграфе мы также доказываем теорему о том, что любая задача на построение с помощью циркуля и линейки может быть решена с помощью одной линейки, если дана вспомогательная окружность ω.

После рассмотрения теоретического материала в параграфах 8.1–8.6 предлагается определенный набор задач, при этом в параграфах 8.1–8.4 мы обращаем внимание на то, какие задачи мы не можем решить, используя введенную данную фигуру.

В качестве примера рассмотрим решение одной задачи на построение с помощью одной линейки, если дана окружность ω (п. 8.5).

Задача. Даны окружность ω с центром O, прямая *a* и точка $M \notin a$. Построить с помощью одной линейки прямую $MT \parallel a$.

Здесь мы рассмотрим только второй этап – «Построение», опуская этапы анализа, доказательства и исследования, а также опуская иллюстрацию (чертеж), при этом в скобках указаны аксиомы и основные построения – обоснования существования (построений) указанных фигур.

Построение. Последовательно строим:

1. Точки $A \in \omega$ и $B \in \omega$ ($П_6$).
2. Прямые OA и OB (A_1).
3. Точку $C \in \omega \cap OA$ (A_3).
4. Точку $D \in \omega \cap OB$ (A_3).
5. Прямые AB, BC, CD, AD (A_1).

6. Точку A_1=AD $\cap a$ (A_2).
7. Точку B_1=BC$\cap a$ (A_2).
8. Прямую OK‖AD ($ОП_3$).
9. Точку O_1=OK$\cap a$ (A_2).
10. Прямую MT‖a ($ОП_1$).

MT – искомая прямая.

Задачи на построение, связанные с кривыми второго порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола)

Здесь мы рассматриваем некоторые свойства пучков прямых и их связь с кривыми второго порядка, а также ряд задач, связанных с построением касательных к кривым.

Завершаем материал построениями одной линейкой изображения пространственных фигур в параллельной проекции.

Методика обучения теме «Геометрические построения на плоскости»

Замечание. Материал, изложенный в п. 1–9, может быть использован для построения соответствующего школьного спецкурса. Материал п. 10 предназначен для студентов-математиков педагогического направления и учителей математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барский И.Б.* Избранные вопросы геометрии: учебно-методическое пособие. Йошкар-Ола, 2016, 204 с.

GEOMETRIC CONSTRUCTIONS ON A PLANE WITH A SINGLE RULER

Igor Barsky[1], Irina Sergeeva[2]

Mari State University, Yoshkar-Ola

[1] igor.barski@mail.ru, [2] sergeevairinan@yandex.ru

Abstract

One section of a special course “Constructive Solid Geometry” is presented in this paper in short. The course is conducted to the students of Mari State University who are future Math's teachers. The material is arranged in such a way that it can be recommended to all Math's teachers as a part of their special course in their schools.

Keywords: *special course, building one line, system of axioms, the basic construction*

REFERENCES

1. *Barskij I.B.* Izbrannye voprosy geometrii: uchebno-metodicheskoe posobie. Joshkar-Ola, 2016, 204 s.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БАРСКИЙ Игорь Борисович – старший преподаватель, кафедра математики, информатики и методики преподавания естественнонаучных дисциплин, Марийский государственный университет.

Igor Borisovich BARSKY – Senior lecture, Mari State University.

email: igor.barski@mail.ru

СЕРГЕЕВА Ирина Николаевна – старший преподаватель, кафедра математики, информатики и методики преподавания естественнонаучных дисциплин, Марийский государственный университет.

Irina Nicolaevna SERGEEVA – Senior lecture, Mari State University.

email: sergeevairinan@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 3 сентября 2019 года