УДК 511

ХАРАКТЕРИСТИКИ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

Е.В. Стребков[1], А.Р. Галимуллин[2], Д.М. Гарифуллин[3]

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

[1] str9050258629@yandex.ru, [2] amirzolotoy@gmail.com,
[3] damir.gariffullin96@gmail.com

Аннотация

Рассмотрены основные характеристики универсальности статистических критериев.

Ключевые слова: *универсальность статистических критериев, критерий Манна–Уитни, критерий Линка–Уоллеса*

В учебных заведениях по многим специальностям изучаются элементы математической статистики, важным разделом которой являются методы проверки статистических гипотез, позволяющие по небольшому количеству выборочных данных сделать математически обоснованный вывод об изучаемом явлении. Особенностями применения обусловлены затруднения учащихся при изучении этих методов.

Актуальной является проблема выделения статистических критериев, отвечающих основным характеристикам универсальности:

1) возможностью применения для широкого класса прикладных задач из различных областей знаний;

2) минимальными ограничениями на свойства рассматриваемых случайных величин (признаков);

3) наглядностью и простотой алгоритмов без необходимости использования специализированных пакетов программ по аналитической статистике:

4) отсутствием завышенных требований к уровню математической подготовки, что способствует осознанному и корректному применению таких методов учащимися различных специальностей, например, социально-экономических, медико-биологических, психолого-педагогических, информационных и технических.

Характеристикам универсальности в достаточной степени соответствуют непараметрические критерии, применение которых проиллюстрируем на конкретных примерах.

На первом этапе критерия формулируются основная гипотеза H_0 об изучаемом свойстве признака и противоположенная гипотеза H_1, а также выбирается уровень значимости $q = P(\frac{H_1}{H_0})$, т. е. вероятность принятия противоположенной гипотезы H_1 при условии справедливости основной гипотезы H_0 (ошибка I рода). Статистический критерий позволяет математически обоснованно принять или отклонить нулевую гипотезу H_0.

Универсальность непараметрических критериев продемонстрируем на конкретном примере применения критерия Манна–Уитни [2].

Пример 1. Требуется проверить эффективность новой методики обучения.

Шаг 1. Составляются две выборки В1={обучающихся по новой методике (опытная группа)} объема $n = 22$ и В2={обучающихся по старой методике (контрольная группа)} объема m=19. По результатам обучения проведено тестирование, результаты которого в баллах приведены в *Таблице 1*, где n_i и k_i – частоты соответственно для В1 и В2.

Таблица 1

Баллы	В1 (опыт)		В2 (контроль)	
	Частоты	Ранги	Частоты	Ранги
$x_1 = 5$	$n_1 = 4$	4	$m_1 = 3$	2,5
$x_2 = 4$	$n_2 = 7$	6	$m_2 = 8$	7,5
$x_3 = 3$	$n_3 = 8$	7,5	$m_3 = 6$	5
$x_4 = 2$	$n_4 = 3$	2,5	$m_4 = 2$	1
сумма	*n*=22	20	*m*=19	16

Шаг 2. Формулируются гипотезы основная H_0={уровень В2 не ниже уровня В1 (отсутствует эффект)} и противоположенная гипотеза H_1={уровень В2 ниже уровня В1 (присутствует эффект)}.

Шаг 3. Частоты выборок В1 и В2 ранжируются общим массивом по мере увеличения. В строке «сумма» подсчитываются суммы рангов соответственно для В1 и В2.

Шаг 4. Вычисляется фактическое значение критерия

$$U = n\ m + \frac{K(K+1)}{2} - T,$$

где T – наибольшая из ранговых сумм с объёмом выборки K, в частности, для *Примера 1* $U = 651$ при $T = 20$ и $K = 22$.

Шаг 5. Задается уровень значимости q, например, $q = 0{,}01$. По таблицам определяется критическое значение $U_{\text{кр.}}$, если $U > U_{\text{кр.}}$, то гипотеза H_0 принимается. Для *Примера 1* при $q = 0{,}01$ критическое значение $U_{\text{кр.}} = 119$. Таким образом, $U = 651 > U_{\text{кр.}} = 119$, и гипотеза H_0 принимается при уровне значимости $q = 0{,}01$. Следовательно, отсутствует эффект применения новой методики обучения.

Для применения критерия Манна–Уитни необходимо соблюдение условий:

1) критерий предназначен для оценки различий между двумя выборками по уровню признака;
2) измерение может быть проведено в шкале интервалов или отношений;
3) выборки должны быть несвязанными;
4) нижняя граница объемов выборок $n \geq 3, m \geq 3$;
5) верхняя граница объемов выборок $n, m \leq 60$.

Критерий Манна–Уитни предназначен для сравнения показаний только двух выборок. Для широкого класса прикладных задач актуально сравнение показателей нескольких выборок, для которого обычно применяются трудоемкие методы дисперсионного анализа [1], что вызывает у учащихся значительные затруднения. Для подобного класса задач целесообразно рекомендовать наглядный и достаточно универсальный критерий Линка–Уоллеса [2], эффективность которого проиллюстрируем на *Примере 2*.

Пример 2. Для трех групп по 5 испытуемых в каждой проводится тестирование по количеству правильных ответов на 10 предложенных заданий. Результаты тестирования представлены в *Таблице 2*, где x_{ij} – показатели для выборки (группы) BI.

Таблица 2

Номера испытуемых	Выборка B1 (группа 1)	Выборка B2 (группа 2)	Выборка B3 (группа 3)
1	$x_{11} = 4$	$x_{21} = 3$	$x_{31} = 6$
2	$x_{12} = 3$	$x_{22} = 4$	$x_{32} = 7$
3	$x_{13} = 5$	$x_{23} = 4$	$x_{33} = 8$
4	$x_{14} = 4$	$x_{24} = 8$	$x_{34} = 7$
5	$x_{15} = 7$	$x_{25} = 6$	$x_{35} = 6$
размах v_i	$v_1 = 4$	$v_2 = 5$	$v_3 = 2$
средние $\overline{x}_i$	$\overline{x}_1 = 4{,}6$	$\overline{x}_2 = 5$	$\overline{x}_3 = 6{,}8$

Рассмотрим алгоритм критерия Линка–Уоллеса для сравнения выборочных средних.

Шаг 1. Для каждой выборки подсчитываются размах v_i и среднее значение $\overline{x}_i$: размах v_i подсчитывается как разность между наибольшим и наименьшим значениями,

$$\overline{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}.$$

Для *Примера 2* соответствующие значения равны:

$$v_1 = 7 - 3 = 4\,, v_2 = 8 - 3 = 5\,, v_3 = 8 - 6 = 2\,;$$
$$\overline{x}_1 = 4{,}6\,, \overline{x}_2 = 5\,, \overline{x}_3 = 6{,}8\,.$$

Шаг 2. Выбирается уровень значимости q, и для объема выборки n и числа выборок m по соответствующим таблицам находится критическое значение $K_{\text{кр.}}$ Для *Примера 2 при* $\mathrm{q} = 0{,}05, \mathrm{n} = 5, m = 3$ критическое значение $K_{\text{кр}} = 1{,}19$.

Шаг 3. Подсчитаем показатель критерия

$$\text{K} = \frac{K_{\text{кр}} * V}{n} = \frac{1{,}19 * 11}{5} = 2{,}618,$$

где *n*=5 – объем выборок, $\text{V} = v_1 + v_2 + v_3 = 4 + 5 + 2 = 11$ – сумма всех размахов.

Для выборочных средних $\overline{x}$ и $\overline{y}$ при условии

$$|\overline{x} - \overline{y}| > K \tag{1}$$

существует статистически значимое различие между $\overline{x}$ и $\overline{y}$ на уровне значимости q.

Шаг 4. Для *Примера 2* на уровне значимости $q = 0{,}05$ по формуле (1) оценим различие между выборочными средними $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$.

Применив формулу (1), сравним средние значения $\overline{x}_1 = 4{,}6$ и $\overline{x}_2 = 5$

$$|\overline{\text{x}}_1 - \overline{\text{x}}_2| = 0{,}4 < \text{K} = 2{,}618,$$

таким образом, отсутствует различие между $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$.

Аналогично для средних $\overline{x}_1 = 4{,}6$ и $\overline{x}_3 = 6{,}8$ согласно формуле (1)

$$|\overline{\text{x}}_3 - \overline{\text{x}}_1| = 2{,}2 < \text{K} = 2{,}618,$$

т. е. отсутствует различие между $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_3$.

Следовательно, для *Примера 2* на уровне значимости $q = 0{,}05$ можно сделать вывод об отсутствии статистически значимых различий между средними значениями выборок B1, B2 и B3.

Для применения критерия Линка–Уоллеса необходимо соблюдение следующих условий:

1) измерение может быть проведено в шкале интервалов или отношений;
2) число выборок m от 3 до 50;
3) объем выборок $n \geq 3$ должен быть одинаковым.

Критерий Линка–Уоллеса позволяет наглядно и просто без использования пакетов прикладных программ по статистике провести сравнительный анализ выборочных средних для значительного числа выборок, а также при различных комбинациях этих выборок.

Приведенные примеры демонстрируют преимущества универсальных статистических критериев.

Изучение универсальных статистических критериев способствует их корректному и эффективному применению учащимися различных специальностей к расширенным классам профильных задач, в частности при выполнении научных исследований, курсовых и дипломных проектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2003, 469 с.

2. Холлендер М., Вульф. Д. Непараметрические методы статистики. М.: Финансы и статистика, 1983, 518 с.

CHARACTERISTICS OF THE UNIVERSALITY OF STATISTICAL CRITERIA

Evgeniy Strebkov[1], **Amir Galimullin**[2], **Damir Garifullin**[3]

Kazan Federal University, Kazan

[1] str9050258629@yandex.ru, [2] amirzolotoy@gmail.com,
[3] damir.gariffullin96@gmail.com

Abstract

This article discusses the main characteristics of the universality of statistical criteria.

Keywords: *universality of statistical criteria; Mann-Whitney test; Link-Wallace test*

REFERENCES

1. *Gmurman V.E.* Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika: Uchebnoe posobie dlya vuzov. M.: Vy`ssh. shk., 2003, 469 s.

2. *Xollender M., Vul`f D.* Neparametricheskie metody statistiki. M.: Finansy` i statistika, 1983, 518 s.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

СТРЕБКОВ Евгений Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский федеральный университет, г. Казань.

Evgeniy Vladimirovich STREBKOV, Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Kazan (Volga region) Federal University, Kazan.

e-mail: str9050258629@yandex.ru

ГАЛИМУЛЛИН Амир Рамильевич – магистрант, Казанский федеральный университет, г. Казань.

Amir Ramilievich GALIMULLIN – undergraduate, Kazan (Volga region) Federal University, Kazan.

e-mail: amirzolotoy@gmail.com

ГАРИФУЛЛИН Дамир Монирович – магистрант, Казанский федеральный университет, г. Казань.

Damir Monirovich GARIFULLIN – undergraduate, Kazan (Volga region) Federal University, Kazan.

e-mail: damir.gariffullin96@gmail.com

Материал поступил в редакцию 15 августа 2019 года