

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА СО СФЕРИЧЕСКИМИ НАПОЛНИТЕЛЯМИ

Н. Р. Батталов¹ [0009-0006-7823-5717], И. Р. Гарифуллин² [0009-0005-9331-714X],
Л. У. Султанов³ [0000-0002-9428-4221], Л. Р. Фахрутдинов⁴ [0000-0002-8230-3202]

¹Казанский национальный технический университет – КАИ, г. Казань, Россия

²АО «Октопус», г. Астрахань, Россия

^{3, 4}Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

³Институт энергетики и перспективных технологий ФИЦ Казанский науч-
ный центр РАН, г. Казань, Россия

¹batt4lov.nail@yandex.ru, ²garifullin1slam@yandex.ru, ³Lenar.Sultanov@kpfu.ru,

⁴LRFahrutdinov@kpfu.ru

Аннотация

Рассмотрен алгоритм определения эффективных механических характеристик двухфазного композитного материала. В качестве матрицы взят двухпараметрический материал Муни – Ривлина, с наполнителем в виде включений из линейно-упругого материала. Представлены результаты определения механических свойств матрицы из экспериментальных данных. Эффективные механические характеристики дисперсно-армированного композитного материала определены из решения задачи об одноосном растяжении образца с помощью метода конечных элементов. Физические соотношения полученного композитного материала описывается гиперупругой моделью Муни – Ривлина. Исследовано влияние объемного содержания включений на механические характеристики материала. Показано, что при увеличении объемной доли наполнителя значение начального модуля сдвига композитного материала также растет.

Ключевые слова: нелинейно-упругий материал, материал Муни – Ривлина, RVE, метод наименьших квадратов, армированный композит.

ВВЕДЕНИЕ

В условиях постоянного создания новых и совершенствования существующих материалов определение механических свойств композиционных материалов является актуальной задачей. Самым эффективным способом нахождения их механических параметров является эксперимент, но для предварительного предсказания поведения материала целесообразно использовать либо аналитические, либо численные методы определения искомых характеристик. Таким исследованиям посвящено множество публикаций (см., например, [1–12]), а одним из популярных методов определения эффективных свойств материала является, например, метод Эшелби [10–12]. В [13, 14] использованы модель Эшелби для включений эллипсоидальной формы и предположение об их изолированности в бесконечной матрице, что исключает учет взаимодействия между частицами. Несмотря на эффективность при малых концентрациях, для материалов с высокой объемной долей наполнителя применение этого метода вызывает значительные затруднения.

Метод асимптотического осреднения обеспечивает высокую точность прогнозирования механических свойств композита при высокой концентрации наполнителя за счет строгого учета взаимодействия компонентов в рамках ячейки периодичности. В отличие от метода Эшелби, этот метод базируется на решении краевых задач на микроуровне [15, 16]. Однако аналитические и численные методы решения таких задач в настоящее время разработаны преимущественно для более простых структур – слоистых и однонаправленно армированных композитов.

Иной подход к определению эффективных характеристик композитов представлен в работах [17, 18], посвященных исследованию представительного элементарного объема (RVE). Под RVE понимается наименьшая геометрическая модель структуры, использование которой в численных экспериментах обеспечивает сходимость результатов при определении эффективных характеристик композита. Проблема обоснования размеров RVE остается дискуссионной из-за отсутствия общепринятых алгоритмов его построения. Существующий разбор подходов – от жесткой привязки к геометрии периодичности до рассмотрения

бесконечных сред – указывает на субъективность выбора масштаба при моделировании.

В настоящей работе неопределенность в выборе масштаба RVE была преодолена путем установления жесткой геометрической зависимости между размером расчетной области и объемной долей наполнителя. Для серии экспериментов по определению модуля сдвига представительный объем рассматривался как кубическая ячейка, размер которой изменялся в зависимости от требуемой концентрации включений.

АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Постоянные характеристики нелинейного материала можно найти из экспериментальных данных с помощью их аппроксимации определенной функцией [2]. Предполагается, что рассматриваемый материал является изотропным и несжимаемым, т. е. определитель тензора градиента деформации $\mathbf{F}$ равен единице: $J = \det(\mathbf{F}) = 1$. В связи с малым количеством циклов экспериментов с одним одноосным растяжением и с учетом несжимаемости материала в качестве наиболее подходящей аппроксимирующей функции выбран упругий потенциал, описывающий двухпараметрический гиперупругий материал Муни – Ривлина [2, 19].

В качестве аргументов этой функции выбрана мера деформации Фингера $\mathbf{B}$, инварианты которой могут быть записаны в виде

$$I_1 = \sum_{i=1}^3 B_{ii} = \sum_{i=1}^3 B_i = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{22} & B_{23} \\ B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{33} & B_{31} \\ B_{13} & B_{11} \end{vmatrix} = B_1 B_2 + B_2 B_3 + B_3 B_1 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2,$$

$$I_3 = B_1 B_2 B_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2,$$

где λ_i – главные относительные удлинения, B_i – главные значения меры Фингера $\mathbf{B}$ [2, 19].

При одноосном растяжении изотропного материала поперечные удлинения образца будут равными, и с учетом несжимаемости получим [2] $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$. Тогда инварианты меры деформации Фингера $\mathbf{B}$ примут вид

$$I_1 = \lambda_1 + 2\lambda_1^{-1}, \quad I_2 = 2\lambda_1 + \lambda_1^{-2}.$$

Функция потенциальной энергии деформации для несжимаемой двухпараметрической модели Муни – Ривлина выглядит следующим образом [2, 19]:

$$W = c_{10}(I_1 - 3) + c_{01}(I_2 - 3),$$

где c_{10}, c_{01} – постоянные материала. Тензоры истинных и инженерных напряжений Коши можно найти по формулам [2]:

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda_1 \cdot \frac{\partial W(c_{10}, c_{01}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_1} - \lambda_3 \cdot \frac{\partial W(c_{10}, c_{01}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_3} = \\ &= \left(2c_{10} + \frac{2c_{01}}{\lambda} \right) \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right), \\ \sigma_{\text{инж}} &= \frac{\sigma}{\lambda}, \end{aligned}$$

где $\lambda = \lambda_1$.

Одним из методов определения неизвестных параметров аппроксимирующей функции при наличии экспериментальных данных является метод наименьших квадратов (МНК) [2]. Запишем уравнение целевой функции.

$$E^2 = \sum_{k=1}^n \left(\sigma(\lambda^k) - \tilde{\sigma}(c_{10}, c_{01}, \lambda^k) \right)^2,$$

где σ – значения напряжений, полученных из эксперимента, $\tilde{\sigma}$ – значения напряжений, описываемых моделью Муни – Ривлина, $\lambda^k, k=1...n$ – набор значений продольных удлинений [2].

С помощью минимизации квадратичного отклонения определим искомые постоянные нелинейно-упругого материала [2]:

$$\frac{\partial E^2(c_{10}, c_{01})}{\partial c_{10}} = 0, \quad \frac{\partial E^2(c_{10}, c_{01})}{\partial c_{01}} = 0.$$

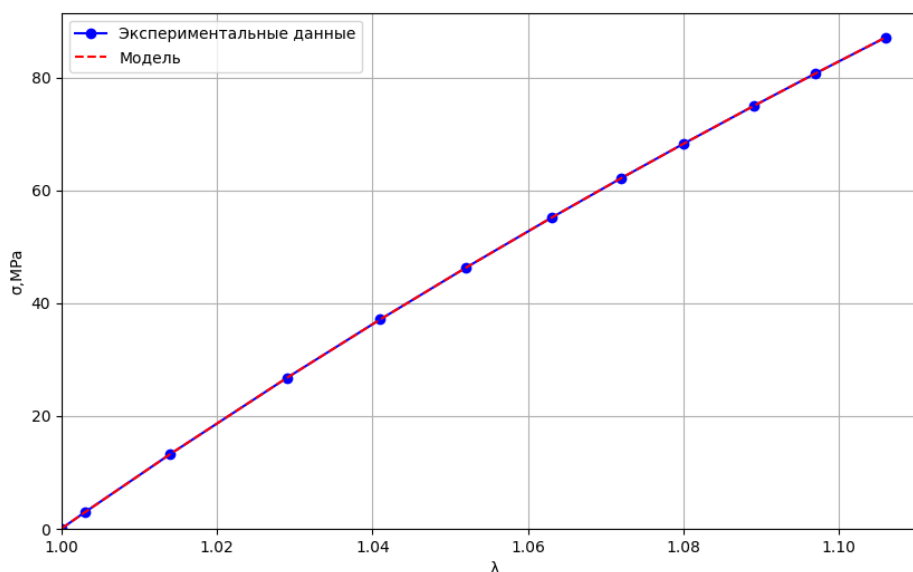


Рис. 1. Экспериментальная и расчетная диаграммы растяжения.

В частности, из эксперимента на одноосное растяжение были определены механические параметры для модели Муни – Ривлина (рис. 1):

$$C_{10} = 56.3236 \text{ МПа}, \quad C_{01} = 104.6637 \text{ МПа}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Представительный (репрезентативный) объемный элемент [18] является минимальным объемом материала, достаточным для проведения численных экспериментов по определению эффективных механических характеристик. В случае композитного материала, армированного сферическими наполнителями, задачу поиска оптимальных размеров представительного объема можно опустить. В настоящей работе таким объемом является куб с одним сферическим включением в центре, размеры которого ограничены соотношением радиуса наполнителя и его объемным содержанием в материале.

Для нахождения эффективных механических характеристик решим задачу об одноосном растяжении представительного объема. Для проведения вычислительного эксперимента используем метод конечных элементов (пакет прикладных программ ANSYS). В силу симметрии при конечно-элементном моделировании вместо всего объема рассмотрим 1/8 объема с соответствующими граничными условиями. Матрицу и сферическое включение разбиваем на сетку ко-

нечных элементов с соответствующим выбором материала (рис. 2). Далее применим алгоритм нахождения механических параметров, описанный в предыдущем разделе. Принципиальное отличие состоит в том, что вместо точных значений напряжений вычислим осредненные значения нормальных напряжений на торце представительного куба, на котором задано смещение, реализующее одноосное растяжение.

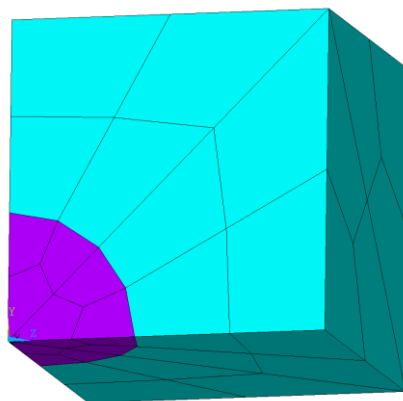


Рис. 2. Конечно-элементная модель представительного объемного элемента (RVE).

Рассмотрим пример дисперсно-армированного композитного материала. Армирующее вещество имеет следующие упругие характеристики: модуль упругости $E = 70 \cdot 10^3$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

В качестве матрицы выбран материал Муни – Ривлина с постоянными, определенными из решения предыдущей задачи: $C_{10} = 56.3236$ МПа, $C_{01} = 104.6637$ МПа.

В табл. 1 представлены результаты серии экспериментов по определению зависимости начального модуля сдвига $G = 2(c_{10} + c_{01})$ от объемного содержания наполнителя.

Табл. 1. Значения модуля сдвига материала.

Объемная доля наполнителя	3%	7%	11%	16%	19%	23%
Размеры куба, мм	0.5	0.39	0.33	0.29	0.28	0.26
Модуль сдвига, Мпа	352.912	391.013	434.132	505.206	568.462	676.197

Из таблицы видно, что при увеличении объемной доли значение начального модуля сдвига материала также растет. Но нужно отметить, что при увеличении объемного содержания наполнителя следует учитывать предел прочности связующей матрицы, так как напряжения, возникающие в ней, также будут расти, что может привести к потере прочности матрицы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена определению эффективных механических характеристик композитного материала. Представленный алгоритм определения механических постоянных нелинейно-упругого материала имеет практическое применение и является достаточно простым инструментом для его использования инженерами. Решение задачи определения эффективных характеристик показало, что с увеличением содержания наполнителя растет начальный модуль сдвига материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles // J. Mech. Phys. Solids. 1963. Vol. 11, no. 5. P. 357–372.
2. Батталов Н.Р. Деформирование элементов конструкций из армированных материалов: магистерская диссертация. Казань: КФУ, 2025. 26 с.
3. Данилаев М.П., Карандашов С.А., Куклин В.А., Сидоров И.Н., Энская А.И. Вычисление эффективных механических характеристик дисперсно-армированного полимерного композиционного материала с низко модульными включениями // Физическая мезомеханика. 2024. Том 27, №3. С. 116–130.

4. Михальченков А.М., Лушкина С.А., Михальченкова М.А., Лавров В.И. Факторы, определяющие функциональность дисперсно-упрочненных композиций на основе эпоксидных смол (машиностроение) // Вестник ФГОУ ВПО Брянская ГСХА. 2015. №2-1. С. 25–28.
5. Мостовой А.С. Рецепттурная модификация эпоксидных смол с применением новых высокоэффективных пластификаторов // Modern high technologies. 2015. №7. С. 66–70.
6. Мостовой А.С. Разработка составов, технологии и определение свойств микро- и нанонаполненных эпоксидных композитов функционального назначения. Саратов, 2014. 149 с.
7. Мостовой А.С., Плакунова Е.В. Разработка огнестойких эпоксидных композиций и исследование их структуры и свойств // Перспективные материалы. 2014. №1. С. 37–43.
8. Рабинский Л.Н., Шавелкин Л.Н. Методы моделирования модифицированных композитов с вискеризованными волокнами // Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов: Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 70-летию БелИИЖТа – БелГУТа, Гомель, Республика Беларусь, 16–17 ноября 2023 года. Гомель: Учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта», 2023. С. 142–143.
9. Hashin Z., Shtrikman S.A. Variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials // J. Appl. Mech. 1963. Vol. 11. P. 127–140.
10. Лурье С.А., Соляев Ю.О. Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро и нановключениями // Вестник ПНИПУ. Механика. 2010. № 1. С. 80–90.
11. Лурье С.А., Волков-Богородский Д.Б. Решение задачи Эшелби в градиентной теории упругости для многослойных сферических включений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2016. № 2. С. 32–50.
12. Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А. Интегральные формулы Эшелби в градиентной теории упругости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2010. № 4. С. 182–192.

13. *Eshelby J.D.* The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences.* A. 1957. Vol. 241 (1226). P. 376–396.
14. *Eshelby J.D.* The continuum theory of lattice defects // *In: Progress in Solid State Physics, Vol. 3* (F. Seitz and D. Turnbull, Eds.). New York: Academic, 1956. P. 79.
15. *Димитриенко Ю.И.* Моделирование нелинейно-упругих характеристик композитов с конечными деформациями методом асимптотического осреднения // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение.* 2015. № 11 (668). С. 68–77.
16. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Базылева О.А., Луценко А.Н., Орешко Е.И.* Моделирование упругопластических характеристик монокристаллических интерметаллидных сплавов на основе микроструктурного численного анализа // *Математическое моделирование и численные методы.* 2015. № 2 (6). С. 3–22.
17. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В., Фагалов А.Р., Пелевин А.Г.* Представительный объем и эффективные материальные характеристики периодических и статистически однородно армированных волоконных композитов // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* 2023. № 1. С. 103–110.
18. *Kanit T., Forest S., Galliet I., Mounoury V., Jeulin D.* Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach // *International Journal of Solids and Structures.* 2003. No. 40 (13-14). P. 3647–3679. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00143-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00143-4)
19. *Голованов А.И., Султанов Л.У.* Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред: Курс лекций. Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 2008. 165 с.

DETERMINATION OF EFFECTIVE MECHANICAL CHARACTERISTICS OF A NONLINEAR COMPOSITE MATERIAL WITH SPHERICAL INCLUSIONS

N. R. Battalov¹ [0009-0006-7823-5717], I. R. Garifullin² [0009-0005-9331-714X],
L. U. Sultanov³ [0000-0002-9428-4221], L. R. Fakhrutdinov⁴ [0000-0002-8230-3202]

¹Kazan National Research Technical University, Kazan, Russia

²Octopus JSC, Astrakhan, Russia

^{3, 4}Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russia

³Institute of Power Engineering and Advanced Technologies, FRC Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia

¹batt4lov.nail@yandex.ru, ²garifullin1slam@yandex.ru, ³Lenar.Sultanov@kpfu.ru,

⁴LRFakhrutdinov@kpfu.ru

Abstract

An algorithm for determining the effective mechanical properties of a two-phase composite material is considered. A two-parameter Mooney–Rivlin material is considered as the matrix, with inclusions of a linearly elastic material serving as the filler. The paper presents the results of determining the mechanical properties of the matrix from experimental data and the results of determining the effective characteristics of a dispersed-reinforced composite material using numerical experiments. The effect of the volume content of inclusions on the mechanical properties of the material is investigated.

Keywords: *nonlinear elastic material, Mooney–Rivlin material, RVE, least squares method, reinforced composite.*

REFERENCES

1. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles // J. Mech. Phys. Solids. 1963. Vol. 11, No. 5. P. 357–372.
2. Battalov N.R. Deformirovanie elementov konstruktsii iz armirovannykh materialov: masterskaya dissertatsiya. Kazan: KFU, 2025. 26 p.
3. Danilaev M.P., Karandashov S.A., Kuklin V.A., Sidorov I.N., Enskaya A.I. Vychislenie effektivnykh mekhanicheskikh kharakteristik dispersno-armirovannogo

polimernogo kompozitsionnogo materiala s nizkomodul'nymi vklyucheniymi // *Fizicheskaya mezomekhanika*. 2024. Tom 27, No. 3. P. 116–130.

4. *Mikhal'chenkov A.M., Lushkina S.A., Mikhal'chenkova M.A., Lavrov V.I.* Faktory, opredelyayushchie funktsional'nost' dispersno-uprochnenykh kompozitov na osnove epoksidnykh smol (mashinostroenie) // *Vestnik FGOU VPO Bryanskaya GSKhA*. 2015. No. 2-1. P. 25–28.

5. *Mostovoy A.S.* Retsepturnaya modifikatsiya epoksidnykh smol s primeneniem novykh vysokoeffektivnykh plastifikatorov // *Modern high technologies*. No. 7. 2015. P. 66–70.

6. *Mostovoy A.S.* Razrabotka sostavov, tekhnologii i opredelenie svoystv mikro- i nanonapolnennykh epoksidnykh kompozitov funktsional'nogo naznacheniya. Saratov, 2014. 149 p.

7. *Mostovoy A.S. Plakunova E.V.* Razrabotka ognestoykikh epoksidnykh kompozitsiy i issledovanie ikh struktury i svoystv // *Perspektivnye materialy*. 2014. Np. 1. S. 37–43.

8. *Rabinskiy L.N., Shavelkin L.N.* Metody modelirovaniya modifitsirovannykh kompozitov s viskerizovannymi voloknami // *Innovatsionnoe razvitie transportnogo i stroitel'nogo kompleksov : Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, posvyashchennoy 70-letiyu BelIIZhTa – BelGUta, Gomel', Respublika Belarus', 16–17 noyabrya 2023 goda. Gomel': Uchrezhdenie obrazovaniya "Belorusskiy gosudarstvennyy universitet transporta"*, 2023, P. 142–143.

9. *Hashin Z., Shtrikman S.A.* Variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials // *J. Appl. Mech.* 1963. Vol. 11. P. 127–140.

10. *Lur'e S.A., Solyaev Yu.O.* Modifitsirovannyi metod Eshelbi v zadache opredeleniya effektivnykh svoystv so sfericheskimi mikro i nanovklyucheniymi // *Vestnik PNIPU. Mekhanika*. 2010. No. 1. P. 80–90.

11. *Lur'e S.A., Volkov-Bogorodskiy D.B.* Reshenie zadachi Eshelbi v gradientnoy teorii uprugosti dlya mnogoslonykh sfericheskikh vklyucheniye // *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2016. No. 2. P. 32–50.

12. *Volkov-Bogorodskiy D.B., Lur'e S.A.* Integral'nye formuly Eshelbi v gradientnoy teorii uprugosti // *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2010. No. 4. P. 182–192.

13. *Eshelby J.D.* The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences.* A. 1957. Vol. 241(1226). P. 376–396.

14. *Eshelby J.D.* The continuum theory of lattice defects. In: *Progress in Solid State Physics*, Vol. 3 (F. Seitz and D. Turnbull, Eds.). New York: Academic, 1956. P. 79.

15. *Dimitrienko Yu.I.* Modelirovanie nelineyno-uprugikh kharakteristik kompozitov s konechnymi deformatsiyami metodom asimptoticheskogo osredneniya // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie.* 2015. № 11 (668). P. 68–77.

16. *Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Bazyleva O.A., Lutsenko A.N., Oreshko E.I.* Modelirovanie uprugoplasticheskikh kharakteristik monokristallicheskikh intermetallidnykh splavov na osnove mikrostrukturnogo chislennogo analiza // *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody.* 2015. No. 2 (6). P. 3–22.

17. *Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V., Fagalov A.R., Pelevin A.G.* Predstavitel'nyi ob'em i effektivnye material'nye kharakteristiki periodicheskikh i statisticheski odnorodno armirovannykh volokonnykh kompozitov // *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika.* 2023. No. 1. P. 103–110.

18. *Kanit T., Forest S., Galliet I., Mounoury V., Jeulin D.* Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach // *International Journal of Solids and Structures.* 2003. Vol. 40 (13-14). P. 3647–3679. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00143-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00143-4)

19. *Golovanov A.I., Sultanov L.U.* Teoreticheskie osnovy vychislitel'noy nelineynoy mekhaniki deformiruemykh sred: Kurs lektsiy. Kazan': Izd-vo Kazansk. gos. un-ta, 2008. 165 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



БАТТАЛОВ Наиль Рашатович – аспирант Института авиации, наземного транспорта и энергетики, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева.

Nail Rashatovich BATTALOV – postgraduate student at the Institute of Aviation, Land Transport and Energy, Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev.

email: batt4lov.nail@yandex.ru

ORCID: 0009-0006-7823-5717



ГАРИФУЛЛИН Ислам Рамилевич – старший инженер-исследователь АО «Октопус».

Islam Ramilevich GARIFULLIN – senior research engineer at Octopus JSC.

email: garifullin1slam@yandex.ru

ORCID: 0009-0005-9331-714X

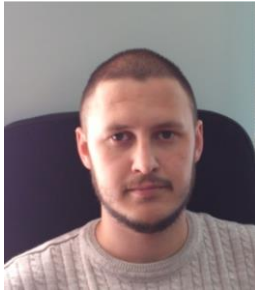


СУЛТАНОВ Ленар Усманович – д. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой теоретической механики, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. Ведущий научный сотрудник, Институт энергетики и перспективных технологий – структурное подразделение Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук».

Lenar Usmanovich SULTANOV – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, head of the Department of Theoretical Mechanics, N. I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal university; leading researcher, institute of Power Engineering and Advanced Technologies – subdivision of the Federal Research Center «Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences».

email: Lenar.Sultanov@kpfu.ru

ORCID: 0000-0002-9428-4221



ФАХРУТДИНОВ Ленар Рустамович – старший преподаватель кафедры теоретической механики, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Lenar Rustamovich FAKHRUTDINOV – senior lecturer at the Department of Theoretical Mechanics, N.I. Lobachevskii Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University.

email: LRFahrutdinov@kpfu.ru

ORCID: 0000-0002-8230-3202

Материал поступил в редакцию 16 мая 2026 года