

УДК 004.942+69.059.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ И МЕТОД РАСЧЕТА УСИЛИВАЕМЫХ НАГРУЖЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

М. Н. Серазутдинов¹ [0000-0003-1675-3819], **М. Н. Убайдуллоев**² [0000-0003-2265-0103]

^{1, 2}*Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Казань, Россия*

¹serazmn@mail.ru, ²madgidpwn@rambler.ru

Аннотация

Представлены разработанные математические модели и вариационный метод расчета пространственных стержневых конструкций, усиленных в нагруженном состоянии. Эти модели и метод расчета имеют более широкие возможности по сравнению с существующими. Их использование позволяет выполнять расчеты стержневых систем, усиливаемых способами наращивания поперечных сечений стержней, изменения расчетной схемы и деформированного состояния. Рассмотрены сложные стержневые конструкции с различными формами поперечного сечения. В основе расчетов лежат гипотезы теории стержней Тимошенко. Для тонкостенных стержней дополнительно использованы положения теории тонкостенных стержней с учетом сдвиговых деформаций. Предполагается, что материал стержневого элемента следует диаграмме линейно упрочняющегося материала. Расчет напряжено-деформированного состояния (НДС) усиленной конструкции выполняется поэтапно. На начальной стадии вычисляются перемещения и напряжения в элементах конструкции под действием исходных нагрузок. На втором этапе определяются величины монтажных сил и напряжений, возникающих при присоединении усиливающих элементов к основным элементам конструкции. На последнем этапе выполняется расчет усиленной конструкции от воздействий дополнительных нагрузок, прикладываемых к конструкции после усиления. Рассмотрены примеры расчета эксплуатируемых конструкций, усиленных различными способами, с использованием предложенных моделей и метода расчета.

Ключевые слова: *стержневая система, математическая модель, вариационный метод, напряженно-деформированное состояние, ремонт и усиление.*

ВВЕДЕНИЕ

Для проектирования усиления эксплуатируемых сооружений актуальными являются вопросы разработки математических моделей и метода расчета усиливаемых конструкций. В настоящее время опубликовано достаточно много научных работ [1–16], в которых исследованы отдельные вопросы оценки несущей способности реконструируемых и усиливаемых сооружений. Разработаны методы расчета железобетонных и металлических конструкций различного назначения. Однако эти исследования не являются универсальными. Методы расчета, предложенные в этих работах, не позволяют учитывать ряд факторов, влияющих на напряженно-деформированное состояние усиливаемых сооружений. К этим факторам относятся наличие начальных напряжений в элементах конструкции до проведения усиления, появление монтажных деформаций при присоединении усиливающих элементов к основным конструктивным частям, изменение расчетной и конструктивной схем конструкции в процессе усиления, развитие упругопластических деформаций элементов конструкции, а также депланация сечения в условиях стесненного кручения тонкостенных стержней. Эти факторы определяют потребность в моделировании усиления и создании универсального расчетного метода.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РАСЧЕТА

Разработаны математические модели и предложен вариационный метод расчета пространственных стержневых конструкций, усиливаемых в условиях действующей нагрузки (рис. 1).

Эти модели и метод расчета имеют более широкие возможности по сравнению с существующими. Их использование позволяет выполнять расчеты стержневых систем, усиливаемых способами наращивания поперечных сечений стержней, модификации расчетной схемы и деформированного состояния. При этом стержневые элементы бывают с разными поперечными сечениями, в том числе армированными.

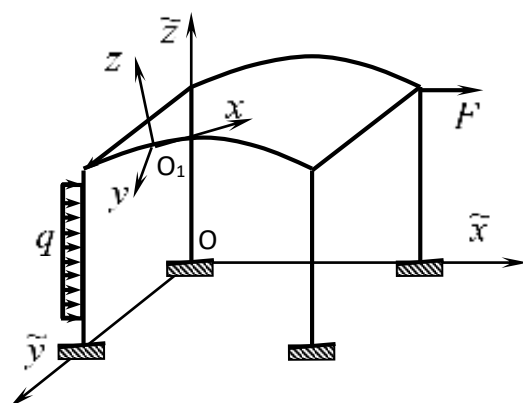


Рис. 1. Схема пространственной стержневой конструкции

Для расчета конструкций, которые необходимо усиливать без снятия действующей нагрузки, используют модели расчета стержней с учетом сдвигов [17]. Полагают, что материал стержневого элемента подчиняется двухлинейной диаграмме линейно упрочняющегося материала. Зависимости между напряжениями σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} и деформациями ε_x , γ_{xy} , γ_{xz} выражаются соотношениями

$$\sigma_x = E^* \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = G^* \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G^* \gamma_{xz}, \quad (1)$$

где

$$E^* = E\alpha + E_k(1 - \alpha), \quad G^* = \frac{E\alpha}{2(1 + \nu)} + \frac{E_k(1 - \alpha)}{2(1 + \nu^*)}. \quad (2)$$

В соотношении (2) E – модуль упругости материала; E_k – касательный модуль упругости при упругопластических деформациях; ν^* – коэффициент поперечной деформации материала в зоне упругопластических деформаций; α – коэффициент, зависящий от величины упругопластических деформаций: $\alpha = 1$ при $\sigma_x \leq \sigma_T$ и $\alpha = \sigma_T / E\varepsilon_x$ при $\sigma_x > \sigma_T$, где σ_T – предел текучести материала.

Деформации ε_x , γ_{xy} , γ_{xz} определяются

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du_1}{dx} - y \frac{d\varphi_3}{dx} + z \frac{d\varphi_2}{dx}; & \gamma_{xy} &= f_1(y, z) \left(\frac{du_2}{dx} - \varphi_3 \right) - f_2(y, z) \frac{d\varphi_1}{dx}; \\ \gamma_{xz} &= f_1^*(y, z) \left(\frac{du_3}{dx} + \varphi_2 \right) + f_2^*(y, z) \frac{d\varphi_1}{dx}, \end{aligned} \quad (3)$$

где u_1, u_2, u_3 – перемещения, а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – углы поворота поперечных сечений стержневых элементов относительно осей Ox, Oy, Oz ; $f_1(y, z), f_1^*(y, z), f_2(y, z), f_2^*(y, z)$ – функции, зависящие от вида деформации и формы поперечного сечения стержня, вид которых определяется формулами, описанными в [18].

Для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) стержневой конструкции применим вариационный метод Лагранжа. Условие равновесия в рамках этого метода запишем в виде

$$\delta U - \delta W = 0, \quad (4)$$

где δU – вариация потенциальной энергии стержневой системы; δW – вариация работы, совершаемой внешними силами.

При расчете конструкций, усиление которых выполняется в нагруженном состоянии, сначала определим начальные напряжения $\sigma_x^H, \tau_{xy}^H, \tau_{xz}^H$. В этом случае вариации δU и δW потенциальной энергии и работы внешних нагрузок, согласно [18], можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta U = \int_l \left[\iint_{A_{\Pi}} (E^* \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G^* \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + G^* \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A_a} (E_a^* \varepsilon_x \delta \varepsilon_x) dA \right] dx, \\ \delta W = \int_{l_q} (q_1^H \delta \tilde{u}_1 + q_2^H \delta \tilde{u}_2 + q_3^H \delta \tilde{u}_3) dl + \sum_i (F_{1i}^H \delta \tilde{u}_1(x_i) + F_{2i}^H \delta \tilde{u}_2(x_i) + F_{3i}^H \delta \tilde{u}_3(x_i)) + \\ + \sum_k (M_{1k}^H \tilde{\varphi}_{1k}(x_k) + M_{2k}^H \tilde{\varphi}_{2k}(x_k) + M_{3k}^H \tilde{\varphi}_{3k}(x_k)). \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) приняты обозначения: l – длина стержня; A_{Π} – площадь поврежденных элементов конструкции и A_a – площадь арматурных сечений (для железобетона); $q_1^H, q_2^H, q_3^H, F_{1i}^H, F_{2i}^H, F_{3i}^H, M_{1k}^H, M_{2k}^H, M_{3k}^H$ – соответственно начальные распределенные и сосредоточенные силы, а также моменты, которые действуют до усиления в точках с заданными координатами x_i^* и x_k^* ; $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$ – перемещения и углы поворота поперечных сечений элементов конструкции относительно координатных осей в глобальной системе координат $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$. После

усиления к элементам конструкции прикладывают дополнительные эксплуатационные нагрузки $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3, \Delta F_{1i}, \Delta F_{2i}, \Delta F_{3i}, \Delta M_{1k}, \Delta M_{2k}, \Delta M_{3k}$.

Расчет конструкции после усиления выполним с учетом начальных напряжений $\sigma_x^H, \tau_{xy}^H, \tau_{xz}^H$, действующих в элементах конструкции. В рамках процедуры усиления металлических конструкций обязательным элементом расчета является учет монтажных напряжений $\sigma_x^M, \tau_{xy}^M, \tau_{xz}^M$, которые возникают при присоединении элементов усиления к основным конструктивным элементам. При этом величины монтажных напряжений определим с помощью метода, описанного в [18, 19].

В случае усиления конструкции способами увеличения сечения элементов и изменения конструктивной и расчетной схемы вариации потенциальной энергии и работы внешних сил можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_l \left[\iint_{A_n} (E^* \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G^* \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + G^* \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A_a} (E_a^* \varepsilon_x \delta \varepsilon_x) dA + \right. & (6) \\ & + \iint_{A_n} ((\sigma_x^H + \sigma_x^M) \delta \varepsilon_x + (\tau_{xy}^H + \tau_{xy}^M) \delta \gamma_{xy} + (\tau_{xz}^H + \tau_{xz}^M) \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A_a} (\sigma_a^H \delta \varepsilon_x) dA \left. \right] dx + \\ & + \int_l \left[\iint_{A_y} (E^* \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G^* \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + G^* \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A_y} (\sigma_x^M \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^M \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^M \delta \gamma_{xz}) dA \right] dx + \\ & + \int_l \left[\iint_{A_d} (E^* \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G^* \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + G^* \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \right. \\ & \left. + \iint_{A_d} (\sigma_x^M \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^M \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^M \delta \gamma_{xz}) dA \right] dx; \\ \delta W = & \int_{l_q} [(q_1^H + \Delta q_1) \delta \tilde{u}_1 + (q_2^H + \Delta q_2) \delta \tilde{u}_2 + (q_3^H + \Delta q_3) \delta \tilde{u}_3] dx + \\ & + \sum_i [(F_{1i}^H + \Delta F_{1i}) \delta \tilde{u}_1(x_i) + (F_{2i}^H + \Delta F_{2i}) \delta \tilde{u}_2(x_i) + (F_{3i}^H + \Delta F_{3i}) \delta \tilde{u}_3(x_i)] + \\ & + \sum_k [(M_{1k}^H + \Delta M_{1k}) \tilde{\varphi}_{1k}(x_k) + (M_{2k}^H + \Delta M_{2k}) \tilde{\varphi}_{2k}(x_k) + (M_{3k}^H + \Delta M_{3k}) \tilde{\varphi}_{3k}(x_k)]. \end{aligned}$$

В соотношениях (6) A_y – площади сечений элементов стержневой конструкции, подвергнутых усилению путем увеличения геометрических размеров поперечного сечения; A_d – площади сечений усиливающих элементов, дополнительно интегрированных в конструкцию.

При расчете НДС тонкостенных стержневых конструкций примем гипотезы и соотношения теории стержней Тимошенко. Используем также следующие гипотезы, принятые в теории расчета тонкостенных стержней [18]:

– гипотеза о неизменяемости контура, согласно которой при деформировании профиль стержня в плоскости поперечного сечения перемещается как абсолютно твердое тело;

– гипотеза безмоментности, в соответствии с которой касательные напряжения, перпендикулярные к профилю (к срединной линии) сечения стержня, равны нулю.

Положим, что деформации могут быть упругими и упругопластическими, а зависимость между напряжением и деформацией подчиняется диаграмме линейно-упрочняющего материала. Тогда напряжения запишутся в виде

$$\sigma_x^* = E^* \varepsilon_x, \quad \tau_{x_t y_t} = G^* \gamma_{x_t y_t}. \quad (7)$$

Деформации ε_x и $\gamma_{x_t y_t}$ в точках сечения тонкостенного стержня, согласно [18, 20], запишем в системе координат $Ay_t z_t$ (рис. 2) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du_1(x)}{dx} + z \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - y \frac{d\varphi_3(x)}{dx} - \frac{d\beta(x)}{dx} \omega(s), \\ \gamma_{x_t y_t} &= \frac{du_2(x)}{dx} t_y + \frac{du_3(x)}{dx} t_z + \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \rho(y_A, z_A) + \\ &+ \varphi_2(x) t_z - \varphi_3(x) t_y - \beta(x) \rho(y_K, z_K) + 2 \frac{d\varphi_1(x)}{dx} z_t. \end{aligned} \quad (8)$$

z

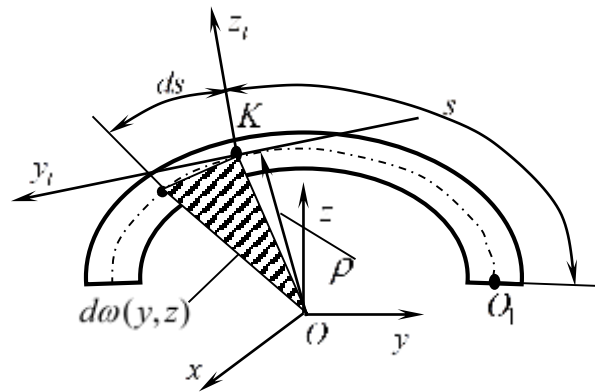


Рис. 2. Расчетная схема тонкостенного сечения

Согласно соотношениям (8), $\beta(x)$ – параметр, количественно оценивающий деформацию поперечного сечения стержня; $\rho(y_K, z_K)$ – геометрическое расстояние, равное длине перпендикуляра, восстановленного из начала координатной системы $Oxyz$ (рис. 2, точка O) к касательной, проведенной к кривой O_1K в фиксированной точке K ; ω – секториальная характеристика сечения.

Длина перпендикуляра $\rho(y_K, z_K)$, секториальная характеристика поперечного сечения $\omega(y, z)$ и координаты точки K вычисляются по формулам

$$\rho(y_K, z_K) = y_K t_z - z_K t_y, \quad \omega(y, z) = \omega(s) = \int_0^s \rho ds, \quad y = y_K + y_t t_y + z_t t_z, \\ z = z_K + y_t t_z - z_t t_y,$$

где t_y и t_z – направляющие косинусы координатных осей Ky_t и Kz_t .

Для тонкостенных конструкций, усиление которых проводится под нагрузкой, входящие в условие (4) вариации δU и δW примут вид

$$\delta U = \int_l \left[\iint_{A_{II}} (\sigma_x^* \delta \varepsilon_x + \tau_{x_t y_t}^* \delta \gamma_{x_t y_t}) dA + \right. \\ \left. + \iint_{A^H} ((\sigma_x^H + \sigma_x^M) \delta \varepsilon_x + (\tau_{x_t y_t}^H + \tau_{x_t y_t}^M) \delta \gamma_{x_t y_t}) dA \right] dx + \\ + \int_{l_y} \left[\iint_{A_y} (\sigma_x^* \delta \varepsilon_x + \tau_{x_t y_t}^* \delta \gamma_{x_t y_t}) dA + \iint_{A_y} (\sigma_x^M \delta \varepsilon_x + \tau_{x_t y_t}^M \delta \gamma_{x_t y_t}) dA \right] dx + \\ + \int_{l_6} \iint_{A_6} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{x_t y_t} \delta \gamma_{x_t y_t}) dA dx + \int_{l_d} \left[\iint_{A_d} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{x_t y_t} \delta \gamma_{x_t y_t}) dA + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \iint_{A_d} (\sigma_x^M \delta \varepsilon_x + \tau_{x_t y_t}^M \delta \gamma_{x_t y_t}) dA] dx; \tag{9} \\
 \delta W = & \int_{l_c} (q_1^H + \Delta q_1) \delta \tilde{u}_1 + (q_2^H + \Delta q_2) \delta \tilde{u}_2 + (q_3^H + \Delta q_3) \delta \tilde{u}_3 + \\
 & + (m_1^H(x) + \Delta m_1(x)) \delta \tilde{\varphi}_1(x) + (m_2^H(x) + \Delta m_2(x)) \delta \tilde{\varphi}_2(x) + \\
 & + (m_3^H(x) + \Delta m_3(x)) \delta \tilde{\varphi}_3(x) - (m_B^H(x) + \Delta m_B(x))(x) \delta \tilde{\beta}(x)] dx + \\
 & + \sum_{k=1}^K [(F_{1k}^H + \Delta F_{1k}) \delta \tilde{u}_1(x_k) + (F_{2k}^H + \Delta F_{2k}) \delta \tilde{u}_2(x_k) + (F_{3k}^H + \Delta F_{3k}) \delta \tilde{u}_3(x_k)] + \\
 & + \sum_{j=1}^J [(M_{1j}^H + \Delta M_{1j}) \delta \tilde{\varphi}_1(x_j) + (M_{2j}^H + \Delta M_{2j}) \delta \tilde{\varphi}_2(x_j) + \\
 & + (M_{3j}^H + \Delta M_{3j}) \delta \tilde{\varphi}_3(x_j) + (M_{Bj}^H + \Delta M_{Bj}) \delta \tilde{\beta}(x_j)],
 \end{aligned}$$

где $\sigma_x^H, \tau_{x_t y_t}^H$ – начальные напряжения, присущие конструкции до начала ремонтных работ; $\sigma_x^M, \tau_{x_t y_t}^M$ – монтажные напряжения, возникающие в процессе установки усиливающих элементов; M_{Bj}^H – бимомент, действующий в элементах тонкостенной конструкции в исходном состоянии (до усиления); ΔM_{Bj} – добавочный бимомент, появляющийся после выполнения усиления конструкции.

Определение НДС элементов стержневой конструкции базируется на уравнении Лагранжа (4) с учетом выражений δU и δW и соотношений для напряжений и деформаций (1), (3) или (7) и (8) для тонкостенных стержней.

При определении НДС разделим стержневую конструкцию на N отдельных участков. В глобальной системе координат перемещения ($\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$), углы поворота ($\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$) и меру деформации (β) зададим следующим образом:

$$\tilde{u}_k(x) = \tilde{u}_k^i(t) = \sum_{m=1}^M C_{km}^i f_m(t), \quad \tilde{\varphi}_k(x) = \tilde{\varphi}_k^i(t) = \sum_{m=1}^M D_{km}^i f_m(t), \tag{10}$$

$$\beta^i(x) = \beta^i(t) = \sum_{m=1}^M B_m^i f_m(t).$$

Здесь $t = x/l_i$ ($0 \leq t \leq 1$); x – координата вдоль продольной оси стержня; l_i – размер i -го стержневого элемента; $C_{km}^i, D_{km}^i, B_m^i$ – искомые постоянные,

$f_m(t)$ – функции аппроксимации при $k = 1, 2, 3$; $i = \overline{1, N}$, N – общее число участков стержневой конструкции, M – количество членов ряда,

$$f_1(t) = 1 - t, \quad f_2(t) = t, \quad f_m(t) = (1 - t)t^{m-2} \quad (m = \overline{3, M}).$$

Подставив соотношения (6), а в случае тонкостенных конструкций – соотношения (9), в условие (4) с учетом (10) получим систему алгебраических уравнений

$$[K]\bar{C} = \bar{F}, \quad (11)$$

где $[K]$ – матрица жесткости конструкции; \bar{C} – вектор неизвестных коэффициентов $C_{km}^i, D_{km}^i, B_m^i$; \bar{F} – вектор, зависящий от внешних нагрузок.

Решение системы уравнений (11) позволит определить неизвестные коэффициенты $C_{km}^i, D_{km}^i, B_m^i$. Затем с использованием рядов (10) и выражений (1), а в случае тонкостенных стержней с помощью соотношений (7), вычислим перемещения и напряжения в элементах усиленной стержневой системы.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На основе предложенных моделей и метода расчета приведем примеры расчета эксплуатируемых конструкций, усиленных различными способами.

Пример 1. Расчет статически неопределимой рамной конструкции, усиленной в нагруженном состоянии (рис. 3).

Стойка 1 заданной рамы имеет сплошное по длине повреждение с моментом инерции $J_{II} = 2.67 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$. Для неповрежденных стоек 2, 3, 4 и ригеля рамы моменты инерции соответственно равны $J_{II} = 2.133 \cdot 10^{-2} \text{ м}^4$, $J_p = 0.333 \text{ м}^4$. Характеристики упругости материала $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

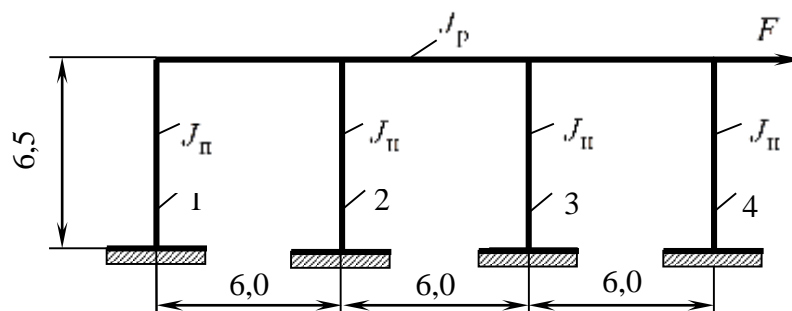


Рис. 3. Расчетная схема статически неопределимой рамы

Усиление рамной конструкции производилось с помощью направленного перераспределения жесткостей стоек [18]. Были рассмотрены следующие варианты усиления стоек рамы:

- а) усилению подвергается только поврежденная стойка 1;
- б) одновременно усиливаются стойки 1 и 2;
- в) одновременно усиливаются стойки 1, 2 и 3.

Расчеты усиления рамы выполнялись способом пошагового увеличения размеров стоек рамы до тех пор, пока не было достигнуто требуемое повышение несущей способности. Критерием достаточности усиления служило соотношение $F^y / F^H = 1.1$, где F^H – максимальная нагрузка, выдерживаемая конструкцией до усиления, F^y – после усиления. Усиление рамы проводилось при уровне начальных нагрузок $F_0 = 0.7 \cdot F^H$, здесь F^H – предельная нагрузка, воспринимаемая поврежденной рамой. Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Из таблицы 1 видно, что наиболее экономичным решением является усиление исключительно поврежденной стойки 1: требуемая степень повышения несущей способности достигается при минимальном соотношении жесткостей элементов рамы. В этом случае соотношения жесткостей стоек оказываются на 95% и 47% ниже, чем при усилении стоек 1 и 2 либо при одновременном усилении всех трех стоек (1, 2 и 3).

Табл. 1. Результаты расчетов рамы усиленной способом пошагового увеличения размеров сечения стоек

Усиление стоек	Степень усиления конструкции F^y / F^H	Уровень начальных нагрузок F_0 / F^H	Сумма жесткостей стоек поврежденной рамы $\sum EJ^H$, кНм ²	Сумма жесткостей стоек рамы после усиления $\sum EJ^y$, кНм ²	Соотношение жесткостей $\sum EJ^y / \sum EJ^H$
1	1.1	0.7	$1334 \cdot 10^4$	$3614 \cdot 10^4$	2.71
1 и 2	1.1	0.7	$1334 \cdot 10^4$	$7060 \cdot 10^4$	5.29
1, 2 и 3	1.1	0.7	$1334 \cdot 10^4$	$5308 \cdot 10^4$	3.98

Пример 2. Расчет усиления двухпролетной рамной конструкции (рис. 4). В качестве поперечного сечения для основных элементов (1–4) и усиливающих стержней (5 и 6) выбрано двутавровое сечение № 33. При усилении этой рамы использовалась такая схема усиления, согласно которой средняя стойка 2 рамы усиливалась способом наращивания поперечного сечения путем присоединения к нему элемента усиления 5, а также в процессе усиления к существующим элементам 1–4 конструкции добавлялись новые усиливающие стержни 6. Исследовались вопросы влияния начальных и монтажных напряжений на степень усиления рамной стержневой системы.

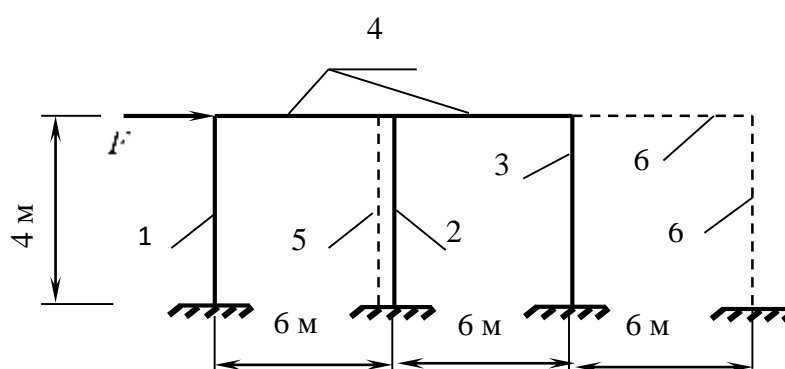


Рис. 4. Схема усиления рамы наращиванием сечения и изменением конструктивной схемы

Результаты расчетов, проведенных при упругих деформациях и с учетом возникновения упругопластических деформаций, представлены в табл. 2.

Табл. 2. Результаты расчетов рамы усиленных способами наращивания поперечных сечений стержней и модификации расчетной схемы

Виды усиления	Уровень начальных нагрузок F_o / F^H	Степень усиления F^y / F^H	
		Упругие деформации	Упругопластические деформации
Без учета монтажных напряжений	0.6	1.21	1.35
С учетом монтажных напряжений	0.6	1.35	2.1

Полученные данные показывают, что при учете монтажных напряжений степень повышения несущей способности конструкции получается значительно большей по сравнению со случаем, когда в расчетах влияние монтажных перемещений и напряжений не учитывается. В случае допущения развития пластических деформаций эффективность усиления получается на 56% больше, чем для случая расчетов только при упругих деформациях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе разработаны математические модели и вариационный метод расчета стержневых конструкций, усиливаемых в условиях действующей нагрузки. По сравнению с традиционными расчетными методиками предложенные решения обладают более широкими аналитическими возможностями.

Использование указанных подходов позволяет рассчитывать усиливаемые стержневые системы с учетом:

- деформационных процессов, присущих исходному состоянию, а также возникающих при монтаже;
- изменений геометрической схемы сооружения;
- упругопластических деформаций в стержнях с нестандартными формами поперечного сечения;
- влияния депланации сечения при стесненном кручении.

На основании разработанных моделей и метода расчета представлены примеры исследования процесса усиления нагруженных стержневых конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu Y., Gannon L.G. Finite element study of steel beams reinforced while under load // *Engineering Structures*. 2009. Vol. 31 (11). P. 2630–2642. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.06.011>
2. Durga P.B., Gupta L.M., Pachpor P.D., Deshpande N.V. Strengthening of steel beam around rectangular web openings // *International Journal of Engineering Science and Technology* Year. 2011. Vol. 3 (2). P. 1130–1136.
3. Воробьев А.В., Фаизов И.Н. Проектирование усиления раскосной фермы // *Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура*. 2012. № 1. С. 162–167. EDN: PMSLXZ

4. *Vild M., Bajer M.* Strengthening Under Load: The Effect of Preload Magnitudes // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 161. P. 343–348.
<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.570>
5. *Бондаренко С.В., Санжаровский Р.С.* Усиление железобетонных конструкций при реконструкции зданий. М.: Стройиздат, 1990. 352 с.
6. *Ватин Н.И., Дьячкова А.А., Кишиневская Е.В., Кузнецов В.Д.* Усиление железобетонных конструкций с использованием композиционных материалов на основе углеродных волокон и постнапрягаемых стержней // *Стройпрофиль*, 2009. № 4. С. 20–21. EDN: SBDDGX
7. *Кишиневская Е.В., Ватин Н.И., Кузнецов В.Д.* Усиление строительных конструкций с использованием постнапряженного железобетона // *Инженерно-строительный журнал*. 2009. № 3. С. 29–32. EDN: NBMYFF
8. *Neverov A.N., Truntov P.S., Ketsko E.S., Rimshin V.I.* Calculating the Strengthening of Construction Structures Before the Reconstruction of the Building // *Proceedings of MPCPE 2021. Lecture Notes in Civil Engineering*. Vol. 182. P. 173–179.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-85236-8_14
9. *Санжаровский Р.С., Астафьев Д.О., Улицкий В.М., Зибер. Ф.* Усиления при реконструкции зданий и сооружений. Устройство и расчеты усиления зданий при реконструкции. СПб. гос. архит-строит. ун-т, 1998. 637 с.
10. *Vild M., Bajer M.* Strengthening Under Load: The Effect of Preload Magnitudes // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 161. P. 343–348.
11. *Меркулов С.И., Татаренков А.И., Стародубцев В.Г.* Усиление железобетонных конструкций эксплуатируемых зданий и сооружений // *Бюллетень строительной техники*. 2017. № 4 (992). С. 41–43.
12. *Duarte M.V. Faria.* Strengthening of flat slabs with post-tensioning using anchorages by bonding // *Engineering Structures*. 2011. Vol. 33 (6). P. 2025–2043.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.02.039>
13. *Campione G.* Load carrying capacity of RC compressed columns strengthened with steel angles and strips // *Engineering Structures*. 2012. Vol. 40. P. 457–465.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.03.006>
14. *Altin S., Kopraman Y., Baran M.* Strengthening of RC walls using externally bonding of steel strips // *Engineering Structures*. 2013. Vol. 49 (3). P. 686–695.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.12.022>

15. *Choi S.H., Hwang J.H., Han S.J., Joo H.E., Yun H. Do, Kim K.S.* Seismic performance assessments of RC frame structures strengthened by external precast wall panel // *Applied Science*. 2020. Vol. 10 (5). 26 p.

<https://doi.org/10.3390/app10051749>

16. *Фролов К.Е.* Экспериментальные исследования железобетонных конструкций гидротехнических сооружений, усиленных композитными материалами // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 3. С. 237–242. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-3-237-242>

17. *Тимошенко С.П., Гере Дж.* Механика материалов. М.: Мир, 1976. 672 p.

18. *Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н.* Моделирование и расчет стержневых конструкций, усиленных в напряженном состоянии. Казань: Изд-во Казан. нац. исслед. технолог. ун-та, 2023. 180 с.

19. *Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н.* Метод расчета монтажных напряжений в стержневых конструкциях, усиливаемых в деформированном состоянии // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2024. Т. 20. № 3. С. 197–210.

<https://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-197-210>

20. *Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н.* Расчет усиливаемых напряженных тонкостенных стержней открытого профиля при упругопластических деформациях // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. 2015. Т. 157, Кн. 1. С. 141–146.

MODELING AND CALCULATION METHOD OF REINFORCED LOADED ROD STRUCTURES

M. N. Serazutdinov¹ [0000-0003-1675-3819], M. N. Ubaydullov² [0000-0003-2265-0103]

^{1, 2}Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia

¹serazmn@mail.ru, ²madgidpwn@rambler.ru

Abstract

The paper presents mathematical models developed by the authors and a variational method for calculating spatial rod structures reinforced in a loaded state. The proposed models and calculation method offer broader capabilities compared to existing ones. Their application enables calculations for rod systems reinforced through methods such as increasing the cross-sections of rods, modifying the design scheme, and altering the deformed state. Complex rod structures with various cross-sectional shapes are examined. The calculations are based on the hypotheses of Timoshenko's beam theory. For thin-walled rods, the principles of thin-walled rod theory are additionally applied, taking shear deformations into account. It is assumed that the material of the rod element follows the diagram of a linearly hardening material. The calculation of the stress-strain state (SSS) of the reinforced structure is performed in stages:

1) at the initial stage, displacements and stresses in the structural elements under the action of initial loads are calculated;

2) at the second stage, the values of the mounting forces and stresses arising when reinforcing elements are attached to the main structural elements are determined;

3) at the final stage, the reinforced structure is analyzed under the effects of additional loads applied after reinforcement.

Based on the proposed models and calculation method, examples of calculation for operational structures reinforced by various methods are provided.

Keywords: *rod system, mathematical model, variational method, stress-strain state, repair and reinforcement.*

REFERENCES

1. Liu Y., Gannon L.G. Finite element study of steel beams reinforced while under load // *Engineering Structures*. 2009. Vol. 31 (11). P. 2630–2642. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.06.011>
2. Durga P.B., Gupta L.M., Pachpor P.D., Deshpande N.V. Strengthening of steel beam around rectangular web openings // *International Journal of Engineering Science and Technology* Year. 2011. Vol. 3 (2). P. 1130–1136.
3. Vorob'ev A.V., Faizov I.N. Proektirovanie usileniya raskosnoj fermy // *Vestnik PNIPU. Stroitel'stvo i arkhitektura* 2012. № 1. P. 162–167. EDN: PMSLXZ
4. Vild M., Bajer M. Strengthening Under Load: The Effect of Preload Magnitudes // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 161. P. 343–348. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.570>
5. Bondarenko S.V., Sanzharovskij R.S. Usilenie zhelezobetonnykh konstrukcij pri rekonstrukcii zdaniy. M.: Strojizdat, 1990. 352 p.
6. Vatin N.I., D'yachkova A.A., Kishinevskaya E.V., Kuznecov V.D. Usilenie zhelezobetonnykh konstrukcij s ispol'zovanie kompozicionnykh materialov na osnove uglerodnykh volokon i postnapryagaemykh strendov // *Strojprofil'*. 2009. № 4. S. 20–21. EDN: SBDDGX
7. Kishinevskaya E.V., Vatin N.I., Kuznecov V.D. Usilenie stroitel'nykh konstrukcij s ispol'zovaniem postnapryazhennogo zhelezobetona // *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*. 2009. № 3. S. 29–32. EDN: NBMYYF
8. Neverov A.N., Truntov P.S., Ketsko E.S., Rimshin V.I. Calculating the Strengthening of Construction Structures Before the Reconstruction of the Building // *Proceedings of MPCPE 2021. Lecture Notes in Civil Engineering*. Vol. 182. P. 173–179. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85236-8_14
9. Sanzharovskij R.S., Astavf'eVD.O., Ulickij V.M., Ziber. F. Usileniya pri rekonstrukcii zdaniy i sooruzhenij. Ustrojstvo i raschyoty usilenij zdaniy pri rekonstrukcii. SPb. gos. arkhitekt-stroitel. un-t, 1998. 637 p.
10. Vild M., Bajer M. Strengthening Under Load: The Effect of Preload Magnitudes // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 161. P. 343–348.
11. Merkulov S.I., Tatarenkov A.I., Starodubcev V.G. Usilenie zhelezobetonnykh konstrukcij ehkspluatiruemykh zdaniy i sooruzhenij // *Byulleten' stroitel'noj tekhniki*. 2017. № 4 (992). S. 41–43.

12. *Duarte M.V. Faria.* Strengthening of flat slabs with post-tensioning using anchorages by bonding // *Engineering Structures.* 2011. Vol. 33 (6). P. 2025–2043. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.02.039>
13. *Campione G.* Load carrying capacity of RC compressed columns strengthened with steel angles and strips // *Engineering Structures.* 2012. Vol. 40. P. 457–465. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.03.006>
14. *Altin S., Kopraman Y., Baran M.* Strengthening of RC walls using externally bonding of steel strips // *Engineering Structures.* 2013. Vol. 49 (3). P. 686–695. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.12.022>
15. *Choi S.H., Hwang J.H., Han S.J., Joo H.E., Yun H. Do, Kim K.S.* Seismic performance assessments of RC frame structures strengthened by external precast wall panel // *Applied Science.* 2020. Vol. 10 (5). 26 p. <https://doi.org/10.3390/app10051749>
16. *Frolov K.E.* Eksperimental'nye issledovaniya zhelezobetonnykh konstrukcij gidrotekhnicheskikh sooruzhenij, usilennykh kompozitnymi materialami // *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij.* 2019. T. 15. № 3. S. 237–242. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-3-237-242>
17. *Timoshenko S.P., Gere Dzh.* *Mekhanika materialov.* M.: Mir, 1976. 672 p.
18. *Serazutdinov M.N., Ubajdulloev M.N.* Modelirovanie i raschet sterzhnevykh konstrukcij, usilennykh v napryazhennom sostoyanii. Kazan': Izd-vo Kazan. nac. issled. tekhnolog. un-t, 2023. 180 s.
19. *Serazutdinov M.N., Ubajdulloev M.N.* Metod rascheta montazhnykh napryazhenij v sterzhnevykh konstrukciyakh, usilivaemykh v deformirovannom sostoyanii // *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij.* 2024. T. 20. № 3. S. 197–210. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-197-210>
20. *Serazutdinov M.N., Ubajdulloev M.N.* Raschet usilivaemykh napryazhennykh tonkostennykh sterzhnej otkrytogo profilya pri uprugoplasticheskikh deformatsiyakh // *Uchen. zap. Kazan. un-ta. Ser. Fiz.-matem. nauki.* 2015. T. 157, kn. 1. S. 141–146.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



СЕРАЗУТДИНОВ Мурат Нуриевич – доктор физико-математических наук, профессор Казанского национального исследовательского технологического университета.

Murat Nurievich SERAZUTDINOV – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of Kazan National Research Technological University.

email: serazmn@mail.ru

ORCID: 0000-0003-1675-3819



УБАЙДУЛЛОЕВ Маджид Насриевич – доктор технических наук, профессор Казанского национального исследовательского технологического университета.

Madzhid Nasrievich UBAYDULLOEV – Doctor of Technical Sciences, professor of Kazan National Research Technological University.

email: madgidpwn@rambler.ru

ORCID: 0000-0003-2265-0103

Материал поступил в редакцию 16 декабря 2025 года